Math Un 78/1

Mathesis. Systemata & methodi
129.

R

Erläuterungen
der
Kästnerischen Anfangsgründe
der
Arithmetik, Geometrie
ebenen und sphärischen
Trigonometrie

Nebst einer Vorrede
von Herrn
Carl Friedrich Hindenburg
der Philosophie Professor zu Leipzig.

Erster Theil.

Altenburg,
in der Richterischen Buchhandlung.
1781.

wie auch

Dem

Hochwohlgebornen Herrn

Herrn

Carl Eugenius Pabst von Ohain

Sr. Churfürstl. Durchl. zu Sachsen hochbestaltem Berghauptmanne.

Meinem gnädigen Herrn.

Hochwohlgeborne Herrn,

Gnädige Herrn,

Die besondern Gnadenbezeugungen, welche Eu. Eu. Hochwohlgebornen mich zu würdigen geruhet, haben in mir den eifrigsten Wunsch erweckt, Hochdenenselben dafür einen öffentlichen Beweis meiner Dankbegierde an den Tag zu legen.

In dieser Absicht wage ich es Eu. Eu. Hochwohlgebohrnen Gnaden diese kleine Probe unterthänig zu überreichen, und Hochderoselben Wohlwollen fernerhin mich zu empfehlen.

Unter dem eifrigsten Wunsche für das Wohlseyn Eu. Eu. Hochwohlgebornen Gnaden habe die Ehre mit der größten Ehrfurcht zu verharren

Hochwohlgeborne Herrn,

Gnädige Herrn,

Eu. Eu. Hochwohlgebornen Gnaden

Leipzig,
im Wonnemonat 1781.

unterthäniger
Johann Friedrich Lempe.

Vorrede.

Vorrede.

Man kann bey der Auswahl eines Systems, dessen man sich zum Leitfaden bey gründlicher Erlernung einer Wissenschaft bedienen will, nicht zu sorgfältig seyn; vorzüglich wichtig aber ist diese Sorgfalt in Absicht auf die Geometrie, deren Vortrag man von jeher als das Muster der vollkommensten Lehrart und aller wissenschaftlichen Erkenntniß angesehen und mit Recht empfohlen hat.

Die Wolfischen Lehrbücher sind bekannt. Ihr Verfasser suchte durch sie den Geschmack an der Mathematik, besonders ihre Lehrart, allgemeiner auszubreiten. Die einleuchtende Deutlichkeit, mit welcher sie, so wie überhaupt alle Schriften dieses verdienstvollen Mannes, abgefaßt sind, beförderte auch die Absicht so sehr, daß sie gar bald, und eine lange Reihe von Jahren hindurch, fast die einzigen waren, die man beym Unterrichte zum Grunde legte; wie sie es denn

auch, nach dem Urtheile aller Kenner, als die besten ihrer Zeit, verdienten.

Noch kamen zwo besondere Ursachen hinzu, die den Vorzug der Wolfischen mathematischen Lehrbücher vor andern entscheidend festsetzten, die auch größtentheils nur Copieen von jenen waren.

Die beste Art eine Wissenschaft gründlich zu erlernen, ist unstreitig diese, daß man sie anfänglich nur nach ihren wesentlichsten Theilen übersehen, daß man die Verbindung aller dieser Theile unter einander und ihre Anordnung zum Ganzen genau kennen lerne. Das ist der Grund und die Hauptabtheilung des Gebäudes; der weitere Fortgang in der Wissenschaft ist Ausbildung der einzelnen Theile und Erweiterung des Ganzen nach dem einmal angelegten Plane. Diesen Vortheil gewährten nur die Wolfischen mathematischen Schriften ausschließlich vor allen andern. Die Anfangsgründe, die bereits einen beträchtlichen Theil mathematischer Kenntnisse enthielten, die lateinischen Elemente, das ausführlichste Werk der ganzen Wissenschaft für die damaligen Zeiten, der Auszug aus den Anfangsgründen für die ersten Anfän-

fänger, erschienen kurz hinter einander, und eröffneten den Liebhabern der Mathematik eine Laufbahn, die sie leicht und sicher zum Ziele führte. Immer derselbe Führer, auf demselben Wege, wer erkennt nicht den Vorzug einer solchen Leitung, wenn anders der Führer, wie in diesem Falle, Einsicht und Verstand besitzt, und der Weg eben und gebahnt genug ist. Auch sahe man die mathematischen Schriften dieses Verfassers als die beste Einleitung zu seinen philosophischen an, und nahm also den Weg zur Philosophie, die dem Freyherrn von Wolf nicht nur Ausbreitung, die ihm selbst Aufklärung und Erweiterung zu verdanken hat, so zu sagen über die Mathematik; unstreitig mit dem besten Erfolge, da bereits die größten Philosophen des Alterthums diesen Weg als den sichersten und zuverläßigsten angepriesen haben, auch Leibnitz sich auf demselben zu einer solchen Höhe in der Philosophie empor geschwungen hat, die alle seine Nachfolger in Erstaunen setzt.

Wären die Wolfischen Anfangsgründe in den neuern Ausgaben jederzeit verbessert, die größern Elemente, bey dem so schnellen Wachsthume der Wissenschaft, verhältniß-

mäßig vermehrt, besonders aber der Auszug aus den Anfangsgründen, den man häufig zu akademischen Vorlesungen brauchte und noch braucht, hier und da verbessert, erweitert, und in seinen Lücken, wegen ermangelnder Kenntnisse der neuern Zeiten, ergänzt worden: so würde man gewiß nicht leicht auf eine Aenderung bedacht gewesen seyn; da sich Männer von tiefen und ausgebreiteten Kenntnissen in den Wissenschaften nicht gern zu den Anfangsgründen herablassen, ob sie gleich nur die einzigen sind, die dergleichen schreiben können, und im erforderlichen Falle sich dieser nützlichen Arbeit auch allein unterziehen sollten. Ein neues, etwas vollständigeres Handbuch der Wissenschaft ward auch immer nöthiger, je mehr der Eifer für die Wissenschaft selbst abnahm. So fremd dieses immer scheinen mag: so wahr ist es doch. So lange man den Auszug nur als einen kurzen, noch sehr unvollkommnen Abriß vom Ganzen ansahe, selbst nach seines Verfassers Absicht nur als Einleitung in seine größern Werke betrachtete: so hatte es weit weniger auf sich, wenn auch anfänglich einige Elementarkenntnisse noch zurückblieben, wenn auch

nicht

nicht alles mit der möglichsten Präcision darinn vorgetragen, nicht alles in der größten Schärfe demonstrirt, und hier und da noch eine Lücke in dem Systeme war: denn das Fehlerhafte konnte bey dem weitern Fortgange verbessert, das Mangelnde ersetzt, und so das Gebäude nach und nach zu einem vollkommnen Ganzen angeordnet und vollendet werden.

Ganz anders verhält es sich damit heut zu Tage, wo der Wolfische Auszug von Vielen, selbst auf Universitäten, als das Non vltra angesehen wird, über welchen hinauszugehen Niemand einen Beruf habe, der nicht die Mathematik zu seinem Hauptgeschäfte machen wolle. Hier kommt es nun darauf an, die kurze Zeit, die für die Mathematik ausgesetzt wird, so gut als möglich zu nutzen. Denn wie man auch immer die Sache nehmen will: man mag die Mathematik entweder zu Schärfung des Verstandes und Vorbereitung auf andere Wissenschaften erlernen, oder auch von den darinn vorgetragenen Lehren mit Einsicht Gebrauch machen wollen, so wie auch nur das gemeine Leben hierzu die Gelegenheit darbietet; in beyden Fällen muß

das

das Lehrbuch, in dem theoretischen Theile mehr demonstrative Schärfe und systematischen Zusammenhang, und in dem praktischen mehr Vollständigkeit haben, und es dürfen also die neuern Entdeckungen und Kenntnisse davon nicht ganz ausgeschlossen seyn.

Freylich haben geschickte und einsichtsvolle Lehrer das theils unrichtige theils nicht ganz richtig Bestimmte in den einzelnen Sätzen und Ausdrücken des Wolfischen Handbuches bey ihrem Vortrage zu verbessern, und das Mangelnde zu ersetzen gesucht; allein, der Zeitverlust ungerechnet, den solche Verbesserungen veranlassen, so kann man doch den dadurch den Fehlern wider die Methode abhelfen, und für die Zusätze hat der fleißige Zuhörer nichts im Buche, woran er sich bey der Wiederholung halten könnte. Eine ungleich größere Unbequemlichkeit, als die ihr entgegengesezte, wo man bey einem reichhaltigern Lehrbuche, hier und da etwas übergehen muß, und dem Zuhörer das Vergnügen überläßt, es durch sich selbst verstehen zu lernen, wenn er es für gut befindet.

Diesen Mängeln und Unbequemlichkeiten ist in unsern Zeiten, bereits seit mehrern Jahren, dergestalt abgeholfen worden, daß fast nichts zu wünschen übrig bleibt. Man hat die Geometrie, von welcher der Freyherr von Wolf für die Anfänger nur sehr wenig vorzutragen, und auch dieses Wenige nicht immer mit den schärfsten Beweisen zu befestigen hatte wagen wollen, wieder in ihre alten Rechte eingesetzt, auch die Lehren der angewandten Mathematik, unsern jetzigen Kenntnissen gemäß, hier und da erweitert und vollständiger abgefaßt.

Unstreitig kann man sich für die Bemühungen der verdienstvollen Männer, die sich einer solchen Arbeit unterzogen haben, nicht dankbarer bezeigen, als wenn man das Licht, das sie in der Wissenschaft gleichsam aufs neue angezündet haben, weiter zu verbreiten gesucht. Daß gute Erläuterungen solcher Arbeiten, ein sehr dienliches Mittel dazu sind, wird Niemand in Zweifel ziehen; um so mehr, je zweckmäßiger das zu erläuternde Lehrbuch selbst abgefaßt ist, das heißt: je mehr es systematische Ordnung mit demonstrativer Schärfe verbindet, und in einer gedrungenen Kürze nur das Wesentliche

sentliche der Sache selbst vorträgt, mit Vorbeygehung aller überflüßigen umständlichern Auseinandersetzung, die mündlichen Erklärungen mit Recht überlässen bleibt.

Diese Vorzüge und Bedingungen eines vollkommnen Lehrbuches hat Herr Hofrath Kästner in seinen Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie auf eine sehr glückliche Art vereiniget und erfüllt; und so wird man auch diese Anfangsgründe nicht zu schwer finden, wenn man sie den Absichten ihres Herrn Verfassers gemäß gebraucht: zum Leitfaden des mündlichen Vortrages bey akademischen Vorlesungen, nicht als ein Buch, woraus Anfänger, die noch nicht zum Denken gewöhnt sind, die Wissenschaft für sich lernen sollen. Das Kästnerische Lehrbuch hat überdies noch das besondere Verdienst, daß es ein classisches Buch in deutscher Sprache für die Wissenschaft ist; ein Vorzug, nach welchem bereits Wolf strebte, den er auch erreicht haben würde, hätte ihm solchen die noch zu wenig gebildete Sprache seiner Zeiten gewähren können. Dennoch bleibt ihm immer das Verdienst, durch seine teutschen mathematischen und philosophischen

schen Schriften zu einem aufgeklärten wissenschaftlichen Vortrage in unserer Sprache gewissermaßen den Grund gelegt und am meisten dazu beygetragen zu haben.

Gegenwärtige Erläuterungen sind also ein lobenswürdiges Unternehmen ihres Herrn Verfassers, da sie Anfängern, bey den Vorbereitungen zu den Lectionen sowohl, als bey deren Wiederholungen statt mündlicher Erklärungen dienen, und in so fern auch denen nützlich seyn können, die Vorlesungen über dieses Lehrbuch zu hören keine Gelegenheit haben. Die Bemühung alles deutlich und Anfängern verständlich auseinander zu setzen, hat freylich den Umfang dieser Erläuterungen etwas erweitert; aber das Kästnerische Handbuch faßt auch, wie bekannt, eine erstaunenswürdige Menge Sachen in einem sehr engen Raume. In der Arithmetik sind einige Zusätze und Regeln für die practische Ausübung beygefügt; in der Geometrie aber die Sätze, die oft nur gezeichnet waren, wörtlich vorgetragen, durchgehends deutlich auseinandergesetzt, die Beweise in der gewöhnlichen Form beygefügt, und auf die Art zu vollkommner Einsicht sehr bequem eingerich-

tet und dargestellt worden. Noch muß ich erinnern, daß der Herr Verfasser das Manuscript seiner Erläuterungen bereits fertig gehabt hat, ehe ich noch mit ihm bekannt geworden bin, daß er sich nur selten meines Rathes, und auch dann nur, mehr zu Bestätigung des bereits von ihm geschriebenen, als zur Belehrung bedient hat. Der angehängte Versuch über die Markscheidekunst hat zunächst die Absicht die nützliche Anwendung geometrischer und trigonometrischer Kenntnisse auf diesen Gegenstand zu zeigen. Hoffentlich steht er also nicht am unrechten Orte; er soll aber auch zugleich zur Probe eines künftig auszuarbeitenden Hand- und Lehrbuchs über die Markscheidekunst dienen, welches der Herr Verfasser herauszugeben gedenkt, wenn dieser kleine Versuch bey Kennern, wie ich nicht zweifle, Beyfall finden sollte.

Und nun noch eine kurze Revision der S. 308 u. f. dieser Erläuterungen von mir mitgetheilten Erinnerungen über die zusammengesetzten Verhältnisse und ihre Bezeichnung.

Gregorius a S. Vincentio in seinen Büchern de Proportionalitatibus geometricis, Cardanus in Opere nouo de Proportionibus, Tacquet in einer besondern Abhandlung de Proportionum denominatoribus, algorithmo, compositione, und so auch Andere, vor und nach dem Gregorius, haben behauptet: die **Zusammensetzung der Verhältnisse** sey nichts anders, als eine **Multiplication** derselben *), und diese Behauptung mit Gründen zu unterstützen gesucht. Hieraus folgt die S. 311 angegebene Bezeichnung der zusammengesezten Verhältniß a : e = (a : b) (b : e), wo man nämlich die einfachen Verhältnisse wie Factoren neben einander schreibt, ganz natürlich und nothwendig; die auch, auf die a. a. O. angegebene Art, ihre Rechtfertigung selbst in der Euklideischen Definition der Zusammengesezten Verhältniß zu finden scheint.

Gleichwohl ist diese Behauptung, und also auch die aus ihr gefolgerte Zeichnung, in der Natur der Sache keineswegs gegründet, wie mich nachher eine genauere Aufmerksamkeit davon überzeigt hat. Auch sagt Euklides nur, eine Verhältniß werde

*) *Compositio rationum* non aliud est, quam *rationum multiplicatio:* et ratio omnis ex iisdem rationibus *componitur* ex quarum *multiplicatione* producitur. Taquet im 11ten Abschn. der angeführten Abhandlung; die man auch in einigen Ausgaben des Euklides als einen Anhang zum fünften Buche findet.

aus andern zusammengesezt, wenn man ihre Glieder oder Exponenten mit einander multiplicirt, entscheidet aber nicht, wie diese Verhältniß aus den gegebenen zusammensezt sey.

Daraus aber, daß die Glieder der Verhältnisse mit einander multiplicirt werden, folgt nicht, daß es die Verhältnisse auch selbst sind.

Verhältnisse sind, wie schon Leibnitz erinnert hat, von Quotienten unterschieden, also keine Zahlen, sondern **Grössen**; quantitates sui generis, wie Hausen sagt. Die Beantwortung der Frage: wie groß eine Verhältniß sey? hängt von der Verhältniß ab, die man, als eine gleichartige Größe mit der gegebenen, als die Einheit oder das Maaß, womit man jene vergleichen oder messen will, dabey zum Grunde legt. Herr Hofrath Karsten hat sich hierüber, und wie das mit den Logarithmen zusammenhängt, sehr deutlich erklärt. Lehrbegr. der Mathem. 2. Th. S. 174, u. f.

In der geometrischen Reihe $1 : e : e^2 : e^3 : e^4 \ldots : e^n$ kann man die Verhältnisse jeder zwey Glieder als Intervallen ansehen. So giebt es von $1 : e^3$ deren drey, jedes so groß als $1 : e$, wenn man diese Verhältniß zur Einheit oder zum Maasse annimmt. Also ist $1 : e^3$ die **Summe** dieser Intervallen, nicht das **Product**. Auch enthält die zusammengesezte Verhältniß $1 : e^n$ die einfache $1 : e$ nmal (oder jene ist die nplicata von dieser) eben so wie bey den Zahlen, n . A die Zahl A nmal

nmal enthält. Besonders einleuchtend zeigt das auch die Arithmetik der Töne, und die dabey gewöhnliche Zusammensetzung der Verhältnisse.

Hieraus folgt die wahre richtige Bezeichnung $1 : e^3 = (1 : e) + (1 : e) + (1 : e) = 3\,(1 : e)$, und so auch $a : e = (a : b) + (b : e)$ nach dem Hausenschen und Kästnerischen Lehrbuche.

Es ist also unrichtig, mit Gregorius und Andern anzunehmen, daß $(a : b) + (a : b) = 2\,a : b$; oder $(a : b) - \frac{1}{3}(a : b) = \frac{2}{3}\,a : b$; und $(10 : 2) - (4 : 2) = 6 : 2$; u. s. w.

Gregorius behauptet nämlich: Verhältnisse verhielten sich, bey gleichen Hindergliedern, directe wie die Vorderglieder; bey gleichen Vordergliedern inverse wie die Hinderglieder; und so würden sich, nach einer richtigen Folge, die Verhältnisse unter einander, wie ihre Exponenten verhalten. Ein offenbar falscher Satz, wie die Prämissen, aus denen er folgt. Die Vergleichung der Verhältnisse führt zu den Logarithmen, wie die Vergleichung der einzelnen Glieder in der Verhältniß zu den Exponenten. Hier sind also Verhältnisse und Exponenten von Gregorius mit einander verwechselt worden.

Da nun die Zusammensetzung der Verhältnisse eine wahre Addition derselben, keine Multiplication ist, so erhellet daraus um so deutlicher, wie nach S. 113, 114 umgekehrte Verhältnisse, mit ihren ordentlichen zusammengesezt, einander

 aufheben,

aufheben, folglich einander entgegengeſezt ſind; und die S. 359 und 369 dawider geäuſſerte Bedenklichkeit fällt alſo von ſelbſt weg.

Den Uebergang von einer Verhältniß wie + 6 : + 2 oder — 6 : — 2 zu den Verhältniſſen + 6 : — 2 oder — 6 : + 2 (dergleichen Verhältniſſe Leibniz imaginäre oder unmögliche nennte) hat Hauſen umſtändlich gezeigt, und beyderley Verhältniſſe als einander entgegengeſezte *) betrachtet. Alſo wären die leztern (— 6 : + 2 oder + 6:

*) Rationes + 6 : — 2 vel — 6 : + 2 et ſimiles oriuntur, vbi *poſitiuae rationes* + 6 : + 2 et — 6 : — 2 (in quibus conſequentes, quales ponuntur, tales in antecedentibus inſunt) — deſtruuntur, ſeu deſinunt rationes eſſe. Deſtructis enim rationibus poſitiuis, illae + 6 : — 2 vel — 6 : + 2 et ſimiles continuo prodeunt, ac ſignorum diuerſitate, quacum prodeunt, denotant relationem *oppoſitionis* ad deſtructas + 6 : + 2 et — 6 : — 2, eiusque relationis vi poſitiuarum deſtructionem inuoluunt. Ferner: rationum (ſc. + 6 : — ½; + 6 : — 1; + 6 : — 2 etc.) ex deſtructione priorum, vt + 6 : + 2, conſequens ortus, id eſt *oppoſitio*, naturaliter connexa — quod Schol. I. Prop. 1. §. 3 de oppoſitis quantitatibus innuit, id valet etiam de rationibus oppoſitis — Similiter in rationibus fieri ſolet etc. Elem. Math. S. 19, 20. In der Folge werden jedoch nur rationes directae und reciprocae als oppoſitae angeſehen: Ratio quaevis et eius reciproca ſunt quantitates determinationis oppoſitae, S. 57, 5. 3.

+ 6 : — 2) negative Verhältnisse, wenn jene (+ 6 : + 2 oder — 6 : — 2) als positive angesehen werden. So sind auch durchgehends in der Untersuchung über die Logarithmen der positiven und negativen Verhältnisse die Verhältnisse hier genommen, und z. B. S. 366 behauptet worden, daß negativer Verhältnisse Logarithmen unmöglich wären, die sonst (wenn man rationes reciprocas und directas einander entgegengesezt) allerdings möglich, und den Logarithmen positiver Verhält- entgegengesezt sind. Und so fordert es auch der eingeführte, auf die Natur der Verhältnisse, in Verbindung mit den Logarithmen, sich gründende Sprachgebrauch. Bey Verhältnissen wie + a : + b und + a : — b sind die Exponenten einander entgegengesezt, aber deswegen nicht auch die Verhältnisse selbst; und so kann auch keine von beyden in Absicht auf die andere negativ genennt werden.

Dennoch ändert das nichts in dem, was S. 364 u. f. von der Leibnitz-Bernoullischen Streitigkeit ist beygebracht worden. Denn, wie man nun auch solche Verhältnisse nennen will, deren Glieder in einander nicht so, wie sie gesezt werden, enthalten seyn können: so kann doch eine Verhältniß wie 1 : — a mit keiner zwischen ein Paar bejahten Zahlen verglichen werden. Da man nun Logarithmen als Zahlen der Verhältnisse zwischen positiven Gliedern ansieht, so giebt es keine ihnen vergleichbare Zahlen der Verhältnisse zwischen

Glie-

Gliedern mit entgegengesezten Zeichen: und so können auch negative Zahlen keine Logarithmen haben, wenn positive welche haben.

Ueber die Logarithmen verneinter Größen, zugleich mit in Beziehung auf die bekannten Streitigkeiten ist in den Abhandlungen der Churfürstlichen Bayerischen Akademie 5. B. ein vortreflicher Auffsatz von Herrn Hofrath Karsten befindlich, in welcher er die Schwierigkeit sehr umständlich und gründlich untersucht hat.

Carl Friedrich Hindenburg,
Professor der Philosophie.

Erläuterungen
der
Vorerinnerungen.

---

§. 1. 2. 3.

Bey jedem Dinge kann man fragen, ob es eine Größe habe, das heist, ob eine Vermehrung oder Verminderung dabey statt finde, oder auch sich nur denken lasse. Findet man nun, daß ein Ding zunehmen oder abnehmen kann, und doch bey der Veränderung ein Ding von eben der Art bleibt, als es zuvor gewesen; so sagt man, das Ding habe oder sey eine Größe. So ist eine Linie eine Größe weil sie vermehrt oder vermindert immer noch eine Linie bleibt. Aus dieser Ursache sind alle uns würklich bekannte Dinge Größen, oder haben, wie man zu sagen pflegt, eine Größe, weil man

bey allen das Mehr oder Weniger gedenken, ja bey manchen selbst wahrnehmen kann. So ist die Sonne eine Größe: denn sie könnte größer oder auch kleiner seyn.

Nun fragt sichs: wie wird uns die Größe eines Dinges bekannt? Auf zweyerley Weise. Erstlich durch die unmittelbare Vorstellung und zweytens durch Vergleichung mit andern bekannten Grössen. Was die erste Art anbetrift, so haben wir einen Begrif von der Größe eines Dinges, so bald wir uns dasselbe vorstellen, weil das Ding selbst eine Größe ist, oder vielmehr, die Größe desselben ist mit ihm selbst genau verbunden, daß also der Begrif des Dinges und seiner Größe immer beysammen seyn.

Anlangend die zweyte Art: so ist es, wenn man jemanden die Größe eines Dinges beschreiben will, an sich selbst nothwendig, eine andere bekannte Größe zu Hülfe zu nehmen und damit die Größe des Dinges zu vergleichen. Will ich z. E. einen die Länge meiner Stube beschreiben, so muß ich die Größe einer gewissen Länge, z. B. der Elle als bekannt voraussetzen, und diese mit der Länge meiner Stube vergleichen, und indem ich sage, sie beträgt funfzehn Ellen, so stellt man sich vor, daß wenn man die Elle funfzehnmal aneinander sezt, eine Länge heraus kommt, die just so groß ist, wie die Länge meiner Stube: oder auch, die Elle ist funfzehnmal in der Länge meiner Stube enthalten.

Dieses Verfahren nun ist eben das, was **Messen** heißt. Bey dem Messen nämlich untersucht man, wie viel mal die bekannte Größe, so das Maas genennt wird, in der unbekannten enthalten ist; und dies ist weiter nichts anders, als daß man die bekannte Größe mit der unbekannten vergleicht. Es müssen also die zumessende oder unbekannte Größe und das Maas von solcher Beschaffenheit seyn, daß sie sich mit einander vergleichen lassen, so, daß wenn z. E. die zumessende Größe eine Länge ist, das Maas auch eine Länge seyn muß. Es können aber auch bey dem Messen Fälle vorkommen, und kommen oft welche vor, wo das Maas nicht genau ein oder etliche mal in der zumessenden Größe enthalten ist. In dergleichen Fällen nun, kann zwar das Maas in dem Zumessenden etlichemal ganz, aber auch noch Stücken von dem Maas stecken. Wenn ich z. B. sage: mein Tisch ist zwey und drey viertel Elle lang, so deutet dieses an, daß die Elle, als das Maas, in der Länge meines Tisches, zwey mal ganz und über dies noch drey von den vier gleichen Stücken, in welche die Elle ist getheilt worden, enthalten ist.

§. 4. Die Lehre von Größen, welche zeigt, wie unbekannte durch bekannte zu finden seyn, heißt die **Mathematik** oder **Größenlehre** (Mathesis). Sie beschäftiget sich also mit solchen Dingen, die von Ausmessung der Größe abhängen. Hieher gehört eine jede Sache, deren Größe angegeben werden kann. — Sie lehrt un-

sern Verstand Regeln, nach welchen wir die Grössen aller Dinge zu schätzen haben. — Ihren Namen hat sie von dem griechischen Worte μάθησις oder μαθημα (Doctrina, Disciplina, Wissenschaft). Sie wurde deswegen so genennt, weil sie im vorzüglichsten Grade Wissenschaft ist; und nach welcher alle andere sich zu bilden suchen sollten. Sie wurde in der Pythagoräischen und Platonischen Schule beständig als eine Vorbereitung zu den Philosophischen Wissenschaften getrieben. Und in dieser Schule behauptet man auch, daß sie deswegen den Namen Wissenschaft führte, weil sie richtig denken lernte. Man lese hiervon Clav. Eucl. proleg. 1, Hentschens Mathemat. Wissenschaften 1 Th. 1 §. u. a.

§. 7. Um sich das Vermehren und Vermindern einer Sache vorzustellen, muß man sie als ein Ganzes, das aus einer Menge Theile besteht, ansehn, und sich vorstellen, daß zu dieser Menge, Theile von der Art, als wovon das Ganze ist, hinzukommen oder davon weggenommen werden. Man kann also die Größe einer Sache blos als ein Ganzes, als eine Menge oder Vielheit von Theilen, sie mögen einander gleich oder nicht gleich seyn, betrachten. So kann man sich die Größe, z. E. einer Elle blos in eine Menge von Theilen getheilt, die die ganze Größe der Elle, ein Ganzes ausmachen, gedenken. Ein solcher Theil des Ganzen aber, der in demselben enthalten ist, heißt ein aliquoter Theil desselben; jeder anderer ein Aliquanter.

Alle

Alle Betrachtungen nun, der Größe als eine Menge von Theilen oder als ein Ganzes gehören in die Arithmetik. Diese beschäftiget sich also mit alle denjenigen, was zählbar ist, lehrt wie man das Zählbare mit einander vergleichen, und aus dem Bekannten desselben, das Unbekannte finden soll.

Bey Betrachtung der Größe als eine Menge Theile können wir auch zugleich mit bemerken, wie diese Theile durch Verbindung und Ordnung ein zusammengeseztes Ding von einer gewissen Gestalt, ausmachen, und alsdenn hat man im allgemeinen Verstande die Wissenschaft, so wegen ihres frühen Gebrauchs bey Messungen und Eintheilungen auf der Erdfläche die **Geometrie** heißt.

§. 8. Dieser § enthält so einen Satz, der von jedermann, so bald man ihn versteht, ohne Beweis eingesehen werden kann, und wie in der Folge erklärt wird, ein Grundsatz heißt. Er lautet so: das Ganze ist allen seinen Theilen zusammen, nämlich alle den Theilen zusammen, die zu dem Ganzen gehören oder dasselbe ausmachen, gleich; d. i. es ist ~~ein~~ einerley, ob man statt des Ganzen alle die Theile, die zu denselben gehören oder statt dieser Theile, das Ganze selbst, setzet. So ist z. B. einerley, ob mir jemand zwey und dreyßig Groschen, oder statt diese, einen Speciesthaler giebt.

Hieraus erhellet: daß das Ganze größer seyn muß, als ein oder etliche von seinen Theilen; und

so folgt umgekehrt: daß ein oder etliche Theile des Ganzen kleiner sind, als das Ganze selbst.

§. 9. Statt der Erläuterung dieses und folgender 10—16 §§, können Anfänger folgende Bücher darüber nachlesen. Nämlich:

Sulzers kurzer Begrif aller Wissenschaften und andere Theile der Gelehrsamkeit. Leipzig 1778. 8. 340. S.

In diesem Buche wird von Seite 74—106 die Mathematik nach ihrem Inhalte und Nutzen kürzlich beschrieben; und Anfänger können es verstehen.

Büschs Encyklopädie der historischen, philosophischen und mathematischen Wissenschaften. Hamb. 1775. gr. 8.

Anfänger werden aber das, was in diesem Buche von der Mathematik gesagt ist, besser verstehen und mit mehrern Nutzen lesen, wenn sie schon dieser Wissenschaft nöthigsten Anfangsgründe gefaßt haben.

§. 21. Es ist begreiflich, daß, wenn wir von einer Sache eine vollständige Erkenntniß erlangen wollen, einsehen müssen:

1) Was die Sache an und für sich nebst ihrer Beschaffenheit in allen Umständen, sey;

2) Die Ursachen, warum sie ihr Daseyn, und warum

warum sie die und keine andere Beschaffenheit habe; und

3) wie groß sie sey.

Nach der ersten Art erhalten wir von einer Sache eine **historische**, nach der zweyten eine **philosophische** und nach der dritten eine **mathematische** — als die **vollkommenste** — **Erkenntniß**. Man sieht also leicht, daß sich unsere ganzen Kenntnisse in historische, philosophische und mathematische eintheilen lassen. Die historischen müssen zum Grunde gelegt werden: denn unser Verstand erlangt seine ersten Ideen von Dingen in dem Zustande der Wirklichkeit; und in welche lächerliche Irrthümer verfallen wir nicht, wenn wir zu früh philosophiren, d. h. Ursachen errathen wollen, ehe wir genug historische Kenntnisse haben? Diesen Fehler begiengen besonders die Alten in ihrer Physik; und unter den Neuern begehen ihn die meisten Herren Hypothesenmacher noch häufig. Diese schreiben eben noch, wie die Alten, der Natur Gesetze vor, ohne sie vorher gefragt zu haben, ob sie dieselben auch annehmen will, ohne sich zu erkundigen, wie sie sich in ihren Wirkungen verhalte.

Wollen wir nun eine richtige und genaue historische Erkenntniß erhalten, so kann dies ohne mathematische Betrachtung der Dinge nicht geschehen. Unsere historischen Kenntnisse überkommen wir größtentheils durch Beobachtungen, und die

 Frage:

Frage: **wie groß?** mischt sich in alle unsere Beobachtungen ein. Vergleichung der Größen zeigen uns die wahre Verbindung der Dinge. So lehrt uns die Größe der Wirkung auf die Größe der Ursache, und dadurch oft auf die Natur und Beschaffenheit derselben schlüßen. Dies thun wir z. B. beym Barometer, indem wir aus dem Stand des Quecksilbers in demselben, die Schwere unsers Luftkreises schätzen. Also muß die einzige, ächte und wahre Philosophie stets von der Mathematik begleitet werden, und folglich muß man diese nicht nach der Philosophie lernen, wie mancher Vernunftlehrer seinen Zuhörern zu versichern geruht, ohne zu bedenken, daß esprit d'observation und esprit du calcul nöthige Eigenschaften eines Philosophen seyn. — Unsere größten Weltweisen sind jederzeit große, oder doch gute Mathematiker gewesen, wie man z. B. Leibnitz, Wolf, Kästner, Lambert und a. m. anführen kann.

§. 22. Hieher gehört Eberhards Gedanken vom Nutzen der Mathematik, Halle 1769; Polaks Mathesis forensis, 4te Aufl. Leipzig 1770; Ungers Beyträge zur Mathesi forensi; Wiedeburgs Mathematik für Oekonomen und Rechtsgelehrte, Jena 1761; Wideb. Math. Bibl. Schmidts bibl. Mathemat. u. a. m.

§. 23. Das Wesentliche der mathematischen **Methode**, die auch die geometrische oder **Euklideische** heißt, (§. 33.) weil Euklids

klids *) Elemente, das beste Muster derselben sind, besteht darinne (§. 31.), daß man alle Lehren 1) aus richtigen Begriffen, 2) ungezweifelten Gründen und 3) durch richtige Schlüsse herleitet; So sieht man leicht, daß diese Methode dem natürlichen Gange des Verstandes gemäß ist. In so ferne nun also jede Wissenschaft einiger sichern Gründe und vernünftigen Schlüsse fähig ist, in so ferne muß das Wesentliche der mathematischen Methode in jeder Wissenschaft brauchbar seyn.

Fälschlich aber hat man die äussere **Form** für die mathematische Methode selbst gehalten; und es ist lächerlich, sie auf die hebräische Grammatik anzuwenden; noch lächerlicher aber ist, daß **Robert Pitcairne**, ein englischer Arzt, als eine Aufgabe aufwirft: Dato morbo, invenire medicinam.

Die mathematische Methode sichert für Irrthümer, wo sich das Wesentliche derselben anbringen läßt, d. h. wo die Wissenschaft selbst Gewißheit und Evidenz verstattet; da kann man freylich nicht fehlen, wenn man nach dieser Methode, d. h. richtig demonstrirt.

*) Dieser **Euklides** lebte zu des Ptolemäus Lagi Zeiten, ohngefehr 300 Jahr vor Christi Geburt zu Alexandrien in Egypten. Er ist der erste, der die zu seiner Zeit geometrischen Lehren gesammlet, sie in ein System gebracht, — das noch bis auf den heutigen Tag das Muster aller übrigen dieser Wissenschaft ist, — und sie zu Alexandrien gelehrt.

Aber ausser der Mathematik giebt es wenig eben so große Evidenz in unsern Kenntnissen. Und hier wäre es lächerlich zu glauben, daß uns die Beobachtung der äussern Form für Irrthümer sichern werde: sonst müßten wir seit Wolfens Zeiten lauter sichere und gewisse Kenntnisse in der Philosophie haben.

§. 24 und 25. Unser Herr Autor und andere haben die Gewißheit und Evidenz der mathematischen Lehren allein der Methode zugeschrieben. Einige hingegen, wie Herr Moses Mendelsohn in seiner Abhandlung über die Evidenz der metaphysischen Wissenschaften, (welche Abhandlung sich auch in seinen philosophischen Schriften, Berl. 1771, gedruckt befindet) setzen die Gewißheit der Mathematik in den Gegenstand. Ich will, um beyde Gründe mit einander vergleichen zu können, hier Auszugsweise anführen, was er hierüber sagt; nämlich:

1) Liegen alle mathematische Wahrheiten in dem einzigen Begrif der **Größe** eingewickelt, und lassen sich aus ihm durch eine bloße Zergliederung herleiten. So läßt Sokrates in dem Menon des Plato einen Sklaven einen tiefsinnigen geometrischen Satz erfinden. Eben so hätte er es können mit der ganzen reinen Mathematik machen. Man sieht hieraus, daß unsere Begriffe von der Größe bis auf den lezten Faden ablaufen, wenn ein Sokrates sich die Mühe nimmt, sie abzuwickeln. Plato nimmt das für ein bloßes Erinnern

an,

an, da Sokrates dem Knaben ja nichts Neues beygebracht habe. Das heißt in der Sprache der neuern Weltweisen: durch die Lehren der Mathematik kommt nichts Neues in die Seele: die mathematischen Schlüsse sind nichts weiter als eine Zergliederung der sinnlichen Eindrücke, oder der von denselben abgesonderten Begriffe der Größe; daher können sie das Dunkle deutlich machen, das Eingewickelte enthüllen, aber schlechterdings nichts Neues lehren. Diese nothwendige Verknüpfung aller mathematischen Sätze mit dem ursprünglichen Begrif der Größe ist die Hauptursache der mathematischen Evidenz.

2) Die reine Mathematik bleibt blos in den Gränzen der möglichen Welt. Hier hat man blos Begriffe zu vergleichen und zu verbinden: nie aber die Existenz irgend eines Subjects zu beweisen. Es ist jederzeit genug, wenn das Subjekt möglich ist. So demonstrirt man von Dreyecken, ohne zu fragen, ob und wo Dreyecke existiren, und die Sätze von ihnen sind uns bedingt. So bald man in das Gebiet der Wirklichkeiten übergeht, hat man nur einen Fall, wo Wirklichkeit so gleich aus Möglichkeit folgt: in allen andern gründen sich die Beweise der Existenz auf Zeugniß der Sinne oder Berichte anderer Personen. Diese Unvollkommenheiten schwächen die Evidenz. Aber die reine Mathematik ist von den Beweisen der Existenz gänzlich losgesprochen. In der angewandten verliert sich daher schon der hohe Grad der Evidenz.

3) Die Geometrie hat den besondern Vortheil der Signorum realium. Die Bezeichnung in ihr ist gar nicht willkührlich. Zwar sind die geometrischen Figuren nur Zeichen, aber sie erwecken durch sich selbst die Idee des wahren mathematischen Subjekts. — So weit Herr Moses Mendelsohn. —

Ohne die Meynungen beyder großen Männer entscheiden zu wollen, scheint es mir, daß die mathematische Evidenz von der Methode und dem Gegenstande zugleich, herrühre.

So evident nun aber auch die mathematischen Lehren sind, so hat es doch in der Mathematik und selbst in der Geometrie Streitigkeiten gegeben. Diese sind aber für weiter nichts als Wortstreit zu halten. Zum Beyspiel mag hier die zu Ende des 16. Jahrhunderts zwischen dem **Clavius** und **Peletarius** geführte Streitigkeit dienen. Sie betrift den Berührungswinkel des Cirkels mit seiner Tangente; und ist nach der Zeit für einen Wortstreit erkannt worden. In der Geometrie werde ich mehr davon zu reden ~~die~~ Gelegenheit haben. Aber alle dergleichen Streitigkeiten schwächen die Evidenz der Mathematik gar nicht. In derselben kann leichter ein Streit mit völliger Ausmachung der dadurch gesuchten Wahrheit geendigt werden, als in andern Wissenschaften.

§. 26. Aus der Sacherklärung ist die Möglichkeit der Sache klar; aber aus der Worterklä-

rung

rung nicht. Denn nach der Natur derselben, fodert man dabey nur, daß in einem Dinge, so den Namen des Definiti führen soll, die Eigenschaften anzutreffen seyn, wodurch es sich nach der Erklärung von andern unterscheidet. Die Möglichkeit des Definiti einer Werkerklärung also, muß, bevor man es zu dem Subjekte eines Satzes gebraucht, gerechtfertigt werden. Z. E. die Erklärung:

Ein Quadrat ist eine ebene Figur von 4 gleichen Seiten und eben so viel gleichen Winkeln

ist eine Werkerklärung, und bevor ihr Definitum für das Subjekt eines Satzes gebraucht werden kann, ist dessen Möglichkeit zu beweisen.

Euklid bedient sich meist Worterklärung; aber ehe er das Definitum zum Subjekt eines Satzes braucht, thut er erst durch eine Construktion oder auf andere Art dessen Möglichkeit dar. Und so machens auch alle andere Mathematiker, die dem Euklid getreulich folgen, dahin gehört unser Herr Autor und einige andere.

§. 37. Bey der **synthetischen Lehrart**, fängt man von den Erklärungen und Grundsätzen an; und geht in Schlüssen fort, bis man auf die Sätze, die man beweisen will, kommt. Diese Methode dient die schon erkannten Wahrheiten in ihrer Verbindung zu zeigen. In den uns bekannten mathematischen Schriften der Alten findet man den Vortrag meist nach dieser Methode.

Bey

Bey der analytischen Lehrart verfährt man umgekehrt; nämlich man fängt von dem Satze den man beweisen will, an, und schließt immer zurück bis auf die Grundsätze und Erklärungen, aus denen er sich herleiten läßt. Diese Lehrart dient zu Erfindungen der Wahrheiten, hilft uns ihre Verbindung mit andern untersuchen, und wenn wir auf falsche Sätze gerathen, die Gründe, warum sie falsch sind, einzusehen. Sie ist von den alten Mathematikern, und besonders vom Plato, obwohl als ein Geheimniß, sehr gebraucht worden.

Erläuterungen der Rechenkunst.

Erstes Capitel.

Von ganzen Zahlen, Brüchen und entgegengesezten Größen.

§. 4.

Die Zahl ist also eine Menge von Einheiten: denn nach der Erklärung ist die Einheit dasjenige, was Dinge die zusammengezählt werden, mit einander gemein haben. Aber Dinge, die etwas mit einander gemein haben, sind (nach 1) Dinge von einer Art: Also ist es, wenn man eine Menge Einheiten hat, eben so viel, als wenn man eine Menge Dinge einer Art hätte; folglich (nach 2) eine Zahl. So ist z. E. eine Menge Thaler z. B. funfzehn, eine Zahl, und der Thaler die Einheit.

Die Einheit kann oft selbst als eine Zahl betrachtet, und in diesem Falle als aus kleinere Einheiten bestehend, angesehn werden. Z. E. bey der Zahl sieben Pfund, ist das Pfund die Einheit; aber es ist bekannt, daß zwey und dreyßig Lothe auch ein Pfund ausmachen; also kann man hier das Pfund sowohl als eine Zahl von zwey und

dreyßig

dreyßig Einheiten, wovon jede ein Loth ist, und auch als eine Einheit, betrachten.

Die Zahlen sind bequeme Zeichen zu Vergleichung der Größen. Sie zeigen nämlich an, um wie viel eine Größe größer oder kleiner als eine andere von eben der Art ist, d. h. sie zeigen an, wie vielmal eine Größe eine andere von eben derselben Art, welche man als die Einheit ansehen kann, (4) in sich enthalten. Z. E. eine Stange, die vier Ellen lang ist, enthält die Elle viermal: oder die Länge der Stange ist viermal so groß, als die Länge der Elle; oder auch, eine Menge von vier Ellen, macht die Länge dieser Stange aus; und die Länge der Elle ist viermal kleiner als die Länge der hier angenommenen Stange.

Jede Zahl, die sich auf Einheiten einer gewissen Art bezieht, heißt eine **genannte Zahl**. Jede andere aber eine **ungenannte**, z. E. die Zahl Sechse ist eine ungenannte Zahl; aber die Zahl sechs Pfunde, eine genannte.

§. 7.

Die Zahl welche multiplicirt wird, heißt der **Multiplicandus**, und die Zahl, mit welcher man multiplicirt, der **Multiplicator**. Das Product ist also ein Ganzes, so aus einer Menge gleicher Theile, aus aliquoten Theilen, besteht. Ein dergleichen Ganzes, heißt ein **Vielfaches**. Das Product ist also ein Vielfaches, des Multiplicandi; und der Multiplicator zeigt an, daß, wie Vielfache es von dem Multiplicando sey.

Wenn

Wenn wir nun hier die Einheit durch einen Stern (*) ausdrücken, so wird eine Menge solcher Stern, eine Zahl andeuten.

Also geben die in dieser Queerreihe oder Zeile stehende vier Stern

* * * *

die Zahl viere. Sezt man nun diese Zahl so viel mal unter einander, als eine Zahl, die z. E. aus drey Einheiten besteht, oder durch drey solche Stern angedeutet wird, anzeigt, wie folget:

A. * * * * B.
a. * * * * b.
C. * * * * D.

so erhält man drey Zahlen, die in den Queerreihen oder Zeilen, welche mit AB, ab, cD bezeichnet sind, stehen, und einander gleich seyn; nämlich gleiche Mengen von Einheiten, jede so viel, wie die Zahl in der Zeile AB, enthalten: und so entsteht das Product AaCDBb, welches die ganze Menge der hier stehenden Sternen, die Einheiten bedeuten, und deren hier zwölfe sind, ist.

§. 9. Weil so viel Zeilen unter einander zu stehen kommen, als in der lothrechten Reihe Einheiten sind, so müssen auch so viel lothrechte Reihen, jede so groß, wie AaC, entstehen, so viel nämlich, als in der Zeile AB sich Einheiten befinden.

Es ist also die erste zunächst an A gränzende Einheit, die erste einer lothrechten Reihe, von so viel Einheiten, als die AaC enthält. Ferner ist auch die zweyte Einheit eben so die 2te einer lothrechten Reihe, die die nämliche Menge von Einheiten hat, als die AaC; gleichergestalt verhält es sich auch mit der dritten und vierten. Hätte die Zahl in der Zeile AB mehr Einheiten, so wären auch mehr solche lothrechte Reihen vorhanden, jede wie AaC, so viel auch AaC Einheiten haben mag. Also sind soviel gleich große in lothrechten Reihen stehende Zahlen hingesezt, als die Zahl in der Zeile AB Einheiten hat. Mithin enthält das hierdurch entstehende Product, die Zahl in der lothrechten Reihe AaC so vielmal, als die Zahl in Zeile AB Einheiten hat, oder so viel mal, als die Einheit in der Zahl AB enthalten ist. Aber die gleich großen und in lothrechten Reihen stehende Zahlen, enthalten eine eben so große Menge von Einheiten, als die gleich großen, und in Zeilen, jede wie AB unter einander gesezten Zahlen, enthalten, d. i. diese beyden Producte sind einander gleich.

§. 10. Jeder Factor steckt in dem Producte so vielmal als die Einheit in dem andern: denn aus (8) ist bekannt, daß die Zahl, die in der Zeile AB steht, eben so vielmal in dem Producte enthalten sey, als die Einheit in der Zahl, die in der lothrechten Reihe AC ist, und aus (9) erhellet, daß das Product diese Zahl so vielmal enthalte, als jene Zahl die Einheit, beyde Zahlen aber sind

(nach

(nach 7) Factores. Es seyn z. E. die Zahlen drey und viere, Factoren, so geben sie mit einander multiplicirt das Product zwölfe. Aber die drey steckt in der zwölfe viermal und die Eins oder Einheit in der Viere auch viermal. Umgekehret steckt die Viere in der Zwölfe dreymal; eben so vielmal, als die Einheit in der Drey. Da auch (nach 9 und dessen Erläuterung) die Zeilen, jede wie AB, eine eben so große Menge Einheiten ausmachen, als die lothrechten Reihen, davon jede wie AC ist, so muß es mithin einerley seyn, und ein gleich großes Product herauskommen, ob man die Zahl in der Zeile AB, mit der Zahl in der lothrechten Reihe AC, oder diese mit jener, multipliciret. Nun sind diese beyden Zahlen Factores; folglich geben einerley Factores mit veränderter Ordnung, doch einerley Product. Z. E. die Zahl viere mit der Zahl drey multiplicirt, giebt das Product zwölfe. Eben das erhält man auch, wenn man die Drey mit der Viere multipliciret.

§. 13. Eine Zahl von einer andern so oft abziehen, als es sich thun läßt, heißt dividiren; die Zahl welche man wegnimmt, nennt man den **Divisor**, die Zahl von der der Divisor auf diese Art ist weggenommen worden, **Dividendus**, und die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Abzug geschehen ist, **Quotient**. Z. E. die Zahl drey kann von der Zwölfe viermal abgezogen werden. Hier ist drey der Divisor, zwölfe der Dividendus, und viere der Quotient.

§. 14. Man bezeichne die Einheit wieder durch einen Stern (*), und stelle sich vor, daß die Einheiten, die den **Dividendus**, den wir D nennen wollen, ausmachen, in Zeilen gesezt wären, wovon jede so viel Einheiten enthielte, als der Divisor, der d heißen mag, hat; als:

```
   * * * * *        d * * * * *
D. * * * * *
   * * * * *        Q * * * *
   * * * * *
```

So viel nun der Dividendus D solcher Zeilen hat, so vielmal kann man den Divisor d davon wegnehmen.

Sezt man nun für jeden Abzug des d von D eine Einheit hin, wie bey Q, so wird die Menge dieser Einheiten in der Zeile bey Q anzeigen, wie oft d von D weggenommen worden ist, und also der Quotient seyn. (13). Und weil jede Zeile in D so groß wie d ist, so sind in der Zeile bey Q die Menge dieser Zeilen; denn, indem man d einmal von D abzieht, ist es eben so gut, als wenn eine Zeile von D weggenommen, und davor eine Einheit in Q gesetzet wäre. Hieraus folget, daß der Dividendus D, den Divisor d so oft enthält, als der Quotient Q, die Einheit, d. i. wie im Buche steht, der Divisor steckt so vielmal in dem ꝛc.

Ist z. E. die Zahl funfzehn der Dividendus, und die Fünfe der Divisor, so steckt die Fünfe in der Funfzehn, dreymal, und die Einheit steckt auch

drey.

dreymal in der Drey. Hieraus erhellet auch, daß eine Zahl von einer andern so oft als möglich wegzunehmen, eben so viel sey, als: angeben, wie vielmal die eine in der andern stecke.

§. 16.

Im (14) kann man (vermöge 7 und dessen Erl.) den Dividendus als ein Produkt betrachten, wovon der Divisor der eine und der Quotient der andere Faktor. Also muß der Dividendus herauskommen, wenn man den Divisor mit dem Quotienten multiplicirt. Da nun der Divisor im Dividendo so vielmal enthalten ist, als die Einheit in Quotienten, der Dividendus aber als ein Produkt, wovon der Quotient und Divisor die Faktorn sind, anzusehen ist, (nach 10) ebenfalls der eine Faktor im Produkt so oft steckt, als die Einheit im andern, so giebt folglich das Produkt mit dem einen Faktor dividirt, den andern.

§. 17.

Der Divisor d und Dividendus D können so beschaffen seyn, daß wenn man den Divisor vom Dividendus so oft als es sich thun läßt, wegnimmt, der Divisor davon zwar ein oder etlichemal ganz abgezogen werden kann, jedoch daß noch etwas vom Dividendus übrig bleibt; d. i. der Dividendus D kann zwar in Zeilen ausgedruckt werden, wovon aber nicht jede Zeile so groß, wie der Divisor d, sondern eine Zeile davon kleiner als d ist.

Z. B. dient das Exempel im Buche, da nämlich der Divisor d aus fünf, der Dividendus D

aber, aus zwölf Einheiten besteht, genommen wird. Das Verfahren nun giebt folgendes:

D * * * * * d * * * * *
* * * * *
* *

Man kann also zwar den Divisor d vom Dividendus D zweymal genau abziehen, aber demohnerachtet bleibt von D noch etwas übrig, das kleiner als D ist, weil hier d zweymal genommen, zehn Einheiten beträgt, da doch D aus zwölf Einheiten besteht. Wenn man aber d von D dreymal wegnähme, so nähme man eine Menge Einheiten von D weg, die größer als D wäre. Der Quotient Q also, den man durch solche Division erhält, muß zwischen zwo ganze Zahlen, wie hier im Exempel zwischen zwey und drey fallen.

§. 18.

Aus dem bisherigen erhellet deutlich, daß alle ganze Zahlen, nur auf viererley Arten und nicht mehrere verändert werden können. Die ersten zwey Arten der Veränderung derselben geschehen durch die Vermehrung, die andern zwey aber durch die Verminderung. Diese vier Arten der Veränderung nennt man die vier **Species der Rechenkunst.**

§. 21.

Es wäre rc. So könnte man z. E. nur bis 4 zählen und den ersten 4 Zahlen eigne Namen geben; desgleichen auch den Vielfachen der Viere; —

re; — überhaupt mit der Benennung der Zahlen auf ähnliche Art, wie bey dem dekadischen Zahlengebäude, verfahren.

Es sind von einigen verschiedene Zahlengebäude angenommen worden, und dies kann mit unzählig vielen geschehen. Hieher gehört unter andern Leibnitzens Dyadik, wo durch die Grundzeichen 0, und 1 alle Zahlen angegeben werden. Daselbst nämlich bedeutet

0	Null	1000	achte
1	eins	1001	neune
10	zwey	1010	zehne
11	drey	1011	eilfe
100	viere	1100	zwölfe
101	fünfe	1101	drehzehn
110	sechse	1110	vierzehn
111	sieben		

u. s. w.

Dieses Zahlensystem giebt man insgemein mit Leibnitzen für den Schlüssel der chinesischen Cova in dem Buche Re-Kim aus.

Ferner das triadische System, wo durch die Grundzeichen 0, 1, und 2, alle Zahlen ausgedruckt werden. Es ist nämlich daselbst

0	Null	11	viere	22	achte
1	eins	12	fünfe	100	neune
2	zwey	20	sechse	101	zehne
10	drey	21	sieben		

u. s. w.

 Auch

Auch das **Weigelische** so genannte **tetracti**sche oder analogischer, tetradische System der alten Thracier. Dieses System giebt mittelst der Grundzeichen, 0, 1, 2, und 3 alle Zahlen an, und bey ihm bedeutet

0	Null	20	achte	100	sechzehn
1	eins	21	neune	101	siebenzehn
2	zwey	22	zehne	102	achtzehn
3	drey	23	eilfe	103	neunzehn
10	viere	30	zwölfe	110	zwanzig
11	fünfe	31	dreyzehn	111	ein und zwanzig
12	sechse	32	vierzehn	112	zwey und zwanzig
13	sieben	33	funfzehn		

u. s. w.

Diese und dergleichen Systeme verschaffen bey Aufsuchung und Untersuchung der Zahlen mancherley Vortheile; ob man aber für sie die dekadischen Zahlzeichen beybehalten oder andere wählen will, ist gleichgültig: Es kann beydes in gewissen Fällen vortheilhaft in andern hingegen nachtheilig seyn.

Ueber dieses und ihrer Verbindung rc. ist vorzüglich des Herrn Mag. Hindenburgs **Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen durch Abzählen oder Abmessen bequem und sicher zu finden** rc. Leipzig 1776, nachzulesen, wornach auch das meiste hier vorgetragen ist.

§. 25.

Unsere Ziffern, die von den Arabern ihren Ursprung haben, und deswegen arabische oder saracenische Zahlzeichen genennt werden, sind im 10ten Jahrhundert zu uns gekommen. Der gegen das Ende des 10ten Jahrhunderts lebende Pabst Sylvester II. — der vorher Gerbert hies, aus der Gegend Aurillac in Auvergne gebürtig war, einen Wiederhersteller der Gelehrsamkeit in Frankreich und zum Theil auch in den angränzenden Ländern abgab, seinen Wissenschaften wegen, damals ~~vor ein~~ Zaubrer gehalten wurde, und im Jahre 1003 starb, — reißte in seinen jüngern Jahren nach Spanien, um die Wissenschaften von den Arabern, die die Ziffern dahin gebracht hatten, zu lernen. Daselbst lernte er auch den Gebrauch der Ziffern, so er auf seiner Rückreise mit nach Frankreich brachte, kennen. Diesem Pabst Sylvester II. nun, haben wir Europäer die Bekanntmachung des (im 24.) angegebenen Merkmals zu danken, obgleich die izt gebräuchliche äußere Form der Ziffern mit der ehemaligen ältern nicht mehr einerley ist. Wenn gleich die Griechen unsere Ziffern nicht kannten, so haben sie sich doch schon des Decimalgesetzes bedient. Sie waren gewohnt nach **Myriaden** zu zählen, und nennten die Zahl 10000, **Myrias**: Sie hatten aber für größere Zahlen keine so vortheilhaft verkürzten Wörter, wie wir an den Zahlwörtern **Million, Billion, Trillion** u. s. w. haben, da man doch ohne Schwierigkeit bis 10000 Myriaden

zählen konnte. Es ist also zu muthmaßen, daß dieser Mangel der Wörter großer Zahlen zu Archimedes *) Zeiten, zu glauben veranlaßt habe, wie sich keine Zahl angeben ließe, die so groß wäre, als die Zahl der Sandkörner des Meeres, auch nicht einmal die, an den Sicilianischen Küsten: und dies mag also Archimedes bewogen haben, seinen Arenarius oder **Berechnung der muthmaßlichen Menge des Sandes der Erdkugel** zu schreiben. In demselben nun, nennt er die Zahl, die 10000 **Myriaden**, oder nach unserer Rechnung 100000000 Einer, enthält, eine **Einheit der zweyten Periode**, und rechnet die einfachen Einheiten zur **ersten Periode**; Er nennt ferner 10000 Myriaden der zweyten Periode Einheiten, die 100 000 000 000 000 000 Einer betragen, eine **Einheit der dritten Periode**; 10000 Myriaden der dritten Periode Einheiten, oder 10 000 000 000 000 000 000 000 000 Einer, eine **Einheit der vierten Periode**, u. s. w.

Man sieht leicht ein, daß, wenn man eine Zahl nach Archimedes Art aussprechen will, man sie in Classen von acht Ziffern und jede Hauptclasse in zwey Nebenclassen von vier Ziffern theilen müsse, da denn z. E. nachstehende Zahl

9^{V} 4596, 3154^{IV} 8967, 2850^{III} 9321, 2005^{II} 3698, 777^{I}

so

*) Der bekannte große griechische Mathematiker zu Syrakus, welcher im Jahr der Welt 3772 gestorben ist.

so auszusprechen wäre: 9 Einheiten der fünften Periode, 4596 Myriaden 3154 Einheiten der vierten Periode, 8967 Myriaden, 2850 Einheiten der dritten, 9321 Myriaden, 2005 Einheiten der zweyten, 3698 Myriaden, 7771 Einheiten der ersten Periode. —

Archimedes fand, daß die Zahl von 1000 Einheiten der siebenten Periode kleiner sey, als die Zahl alles Sandes, der den Raum der ganzen Erdkugel füllte. Das wäre also nach unserer Bezeichnung kleiner als 1000 Octillionen. Er fand ferner, daß die Zahl alles Sandes, wenn der ganze Weltraum bis an den Fixsternenhimmel, nach den Abmessungen, die er den damaligen Kenntnissen gemäs, zum Grunde setzen konnte, damit angefüllt wäre, kleiner sey, als die Zahl von 1000 Myriaden der achten Periode Einheiten, mithin kleiner als 1000 Decillionen.

(Man lese hiervon Karstens Lehrbegrif der Mathematik. 1 Th. 2 Aufl. 1 B. §. 18. d. R. woraus auch meist gegenwärtiges genommen ist.)

§. 28.

Bey dieser Zahl

     5 4 3 2 1
     6 7 0 2 3 4

zeigt die 1 über der 3 an, daß die 3 in der ersten Decimalordnung (24), die 2 über der 2, daß die 2 in zweyten Ordnung, die 3 über der 0, daß die 0 in der dritten Ordnung stehe, u. s. w.

So

So bedeutet auch

$$\overset{42}{25}$$

daß die 5 aus der 42ten Ordnung oder aus der Ordnung der Septillionen, sey; denn in der 6ten Ordnung stehen die Millionen, in der 12ten die Billionen, in der 18ten die Trillionen, u. s. w.

§. 30.

Will man die Gleichheit zwischen zwo Größen andeuten, so sezt man dieses Zeichen (=) zwischen sie. Also bedeutet z. E.

1 Groschen = 12 Pfennige

daß ein Groschen gleich zwölf Pfennige ist.

Wenn zwischen zween oder mehrern Zahlen, das Zeichen (+), so durch mehr oder plus ausgesprochen wird, steht, so zeigt dies an, daß sie zu addiren sind, oder, zusammen eine Summe seyn. Z. E.

$$3 + 4 = 7$$

bedeutet, daß 3 und 4 zusammen addirt werden soll, da dann zur Summe 7 herauskommt; oder, daß 3 und 4 addirt, gleich 7 ist. Will man zwo Zahlen von einander subtrahiren, so sezt man zwischen ihnen das Zeichen (—), so weniger oder minus gelesen wird. Z. E. $9 - 5 = 4$, deutet an, daß von 9 die 5 abgezogen werden soll, und zur Differenz die 4 giebt; oder daß 9 — 5 eine Differenz gleich 4 ist.

Bey

Bey der Multiplication bedient man sich des Zeichens (·) oder (×) statt des Worts multiplicirt oder mal. Z. E.

$3 \cdot 7 = 21$ oder
$3 \times 7 = 21$

heißt, 3 mal 7 ist gleich 21; oder man soll die 3 mit der 7 multipliciren, und man wird dann zum Product 21 erhalten. Es können also dergleichen Ausdrücke, (nämlich wie hier $3 \cdot 7$ oder 3×7) als Producte angesehen werden.

Bey der Division braucht man das Zeichen (:), so man zwischen den Dividendus und Divisor sezt, daß der Divisor zur Rechten steht. Z. E.

$12 : 3 = 4$ heißt

12 dividirt durch 3 ist gleich 4; oder 12 durch 3 dividirt, giebt zum Quotienten 4. Man kann also 12 : 3 oder vielmehr $\frac{12}{3}$ (welche Bezeichnung unten (61) vorkommt) und jeden ähnlichen Ausdruck, als einen Quotienten ansehen.

Bezieht sich eine Arbeit ....
..... Parenthesis ein.

Nämlich oft ist die Zahl, die von einer andern subtrahirt werden soll, selbst eine Summe oder Differenz anderer Zahlen, die man, um Verwirrung zu vermeiden, in eine Parenthese einschließt. Z. E.

$17 - (2 + 9)$

heißt

heißt, man soll 2 und 9 addiren, und die Summe 11 von 17 abziehen; und

$$17 - (9 - 2)$$

zeigt an, daß die Differenz, die durch Subtraction der 2 von der 9 entsteht, von 17 abgezogen werden soll: Also ist

$$17 - (2 + 9) = 17 - 11 = 6; \text{ und}$$
$$17 - (9 - 2) = 17 - 7 = 10$$

Auch bey der Multiplication und Division kommen Fälle vor, wo beyde Zahlen, oder eine von beyden, die multiplicirt oder dividirt werden sollen, aus Zahlen bestehen, die durch die Addition oder Subtraction mit einander verbunden sind; und man hat daher hier ebenfalls die Einschliessung in eine Parenthese zu beobachten. So zeigt z. E.

$$(3 + 4 + 8) . 13$$

an, daß die Summe, aus 3, 4, und 8, mit 13 multiplicirt werden soll; oder, daß man, wie man leicht einsieht, die 13 sowohl in die 3, als auch in die 4 und 8 zu multipliciren und die Partialproducte zu addiren, hat. Also

$$(3 + 4 + 8) . 13 = 15 . 13 = 13 . 3 + 13 . 4 + 13 . 8 = 195 .$$

So ist

$$(15 - 5) . 3$$
$$= 10 . 3 = 30 = 15 . 3 - 5 . 3 = 45 - 15 .$$

Ferner

Ferner z. E.

$(5+4) \cdot (3+2) = 9 \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 15 + 12 + 10 + 8 = 45$; und

$$(6+18) \cdot (9-5) = 24 \cdot 4 = 96$$

der Ausdruck

$$(15+9) : 3$$

sagt, daß die Summe, die aus der 15 und 9 entsteht, durch 3 dividirt werden soll; oder daß man die 15 durch 3 und auch die 9 durch 3 dividiren, und die Partialquotienten addiren müsse. Also ist $(15+9) : 3 = 24 : 3 = 15 : 3 + 9 : 3 = 5 + 3 = 8$.

So ist auch

$$(18-6) : 2$$

$= 12 : 2 = 18 : 2 - 6 : 2 = 9 - 3 = 6$.

Ferner

$(15+5+4) : (7+5) = 24 : 12 = 2$, und

$(21+3+12) : (9-3) = 36 : 6 = 6$

In dem Exempel im Buche,

$(7+6-[12-5]) \cdot 8 : (5+7) = 4$

soll man erstlich 7 und 6 addiren; Hierauf von der erhaltenen Summe 13, die Differenz zwischen 12 und 5, d. i. 7 abziehen und man wird zur Differenz 6 erhalten. Diese nun, soll mit 8 multiplicirt werden, und dieß giebt zum Product 48. Endlich soll das Product 48 durch die Summe 12, die man erhält, wenn man 5 und 7 addirt, dividirt werden, da denn zum Quotienten 4 herauskommt.

Die Rechnung sieht so aus:

$7 + 6 = 13$

$12 - 5 = \underline{7}$ abgezogen, giebt zur Diff.

6

$6 . 8 = 48$

$5 + 7 = 12$; und $48 : 12 = 4$.

§. 33.

Um die Probe des Addirens durch Wegwerfung der Neune zu machen, verfährt man so: Man sieht so wohl alle die Ziffern der Zahlen, die man addirt, als auch der Summe, die man erhalten hat, so an, als wenn sie nur blos Einer anzeigten. Ist unter diesen Ziffern die 9 ein- oder etlichemal befindlich, so streicht man sie aus, und thut als wenn sie nicht vorhanden wäre Hierauf zählt man etliche Ziffern der zusammen addirten Zahlen zusammen, bis man entweder eine der 9 gleiche oder derselben etwas größere Summe erhält. Hat man eine der Neune gleiche Summe, so wirft man sie in Gedanken weg, und zählt auf dergleichen Art weiter fort; Ist aber die Summe etwas größer als Neune, so nimmt man nur bey weitern Zusammenzählen dieser Art, den Ueberschuß dieser Summe über die 9ne, und fährt so fort, bis man durch alle Ziffern der zusammen addirten Zahlen durch ist. Es wird alsdenn 0 oder eine andre Ziffer, die eine kleinere Zahl als die 9ne anzeigt, übrig bleiben. Verfährt man bey den Ziffern in der Summe eben so, so bleibt auch entweder

weder 0 oder eine andre Ziffer die eine kleinere Zahl als 9ne ausdrückt, übrig. Beyde Ueberschüsse aber, sind bey richtiger Addition einander gleich.

Diese **Neunerprobe** aber ist nicht zuverläßig, indem es viele Zahlen giebt, die bey Wegwerfung der 9ne einerley übrig lassen. Hätte man z. E. 780561 statt der wahren Summe 789561 gefunden, so würde man jene nach der Neunerprobe für richtig annehmen können, indem nach Wegwerfung der 9ne, bey ihr eben so viel übrig bleibt, als bey 789561. Dieses und die Menge Ziffern die bey der Addition vorkommen, macht diese Probe fast undienlich. Doch könnte sie noch in so ferne etwas brauchbar seyn, wenn man zugleich mit sähe, ob die Ueberschüsse, die man bey der in jeder Columne wegzuwerfenden 9 erhält, eben so viel 9nen enthielten, als die Ziffern der Summe.

Der Grund von der Neunerprobe ist der: während dem Addiren denkt man eigentlich nicht an die Einheiten jeder Reihe, sieht sie alle als bloße Einer an, und so ofte die Summe einer Reihe in den zu addirenden Zahlen, mehr als 9 beträgt, so oft sezt man für jede Zehne eine Eins in die nächst höhere Stelle, und eben so oft also wirft man dabey 9ne weg, und merkt den Ueberschuß in der Summe an: Es muß daher durchs Wegwerfen der 9, bey richtiger Rechnung, in der Summe sowohl, als in den zu addirenden Zahlen, einerley Ueberschuß erhalten werden.

§. 34.

Um den Beweis der Additionsregeln (31) deutlich führen zu können, hat man das Verfahren im (31), das in der Ausübung freylich weitläuftig wäre, gewählet. Es läßt sich aber abkürzen, und diese Verkürzung beruhet hierauf: Im Exempel des 31. §. erhält man beym Summiren in der Reihe der Einer, 10; man braucht aber die 10 nicht ganz hinzuschreiben, sondern nur die 0 unter diese Reihe zu setzen, und die 1, welche ein Zehner ist, in **Gedanken** zu behalten. Diese wird bey Summirung der Reihe der Zehner zu der ersten Ziffer dieser Reihe hinzugezählt, da man denn 16, nämlich 16 Zehner, erhält.

Unter dieser Reihe wird ebenfalls nur die 6 geschrieben, und die 1, welche ein Hunderter ist, im Gedanken, mit zu den Ziffern der Reihe der Hunderter gezählet. Fährt man auf diese Art fort, so erhält man auf einmal der einzeln zu addirenden Zahlensumme, die in gedachtem Exempel, 688560, und mit I bezeichnet ist.

Dieses Verfahren findet allemal statt; wenn gleich die einzelnen Summen jeder Reihe über Hundert, und noch weiter hinaus gehen sollten, daß also diese Summen an und für sich selbst schon aus 3 und noch mehrern Ziffern bestünden. Man schreibt doch unter jeder Reihe nur die niedrigste Ziffer ihrer Summe und die übrigen rechnet man alsbald zur nächst folgenden Reihe. Aber bey einer so großen Menge Zahlen zu addiren, kann man

man wegen der Beschwerlichkeit große Summen in Gedanken zusammen zu zählen, sich leicht versehen: daher thut man wohl, wenn man das Exempel, nach Beschaffenheit der Umstände, theilet. Auf diese Art erhält man erst einzelne Summen, welche zusammen addirt, die Hauptsumme geben.

§. 35.

Aus dem 12. §. ist bekannt, daß die Differenz und die abgezogene Zahl, zusammen addirt, die Zahl giebt, von der der Abzug geschehen ist. Dieses dient zur Probe ob man richtig subtrahirt hat.

Käme die Zahl, von der abgezogen worden ist, nicht wieder heraus, so ists gewiß, daß man in der Rechnung gefehlt hat. Ist man auf den Fall der richtigen Addition der Differenz und der abgezogenen Zahl versichert; so hat man ohne Zweifel beym Abziehen gefehlt.

Die Differenz von der Zahl, von welcher der Abzug geschehen ist, subtrahirt, giebt die Zahl, die man abgezogen hat: denn nach (12) ist diese Zahl und die Differenz zusammen, der Zahl, von der abgezogen worden ist, gleich; oder diese leztere Zahl, besteht aus der abzuziehenden Zahl und aus der Differenz; nimmt man nun die Differenz davon weg; so bleibt folglich die abzuziehende Zahl übrig.

Dies dient auch bey der Subtrahirung zur Probe.

Man wird leicht einsehen, daß man bey der Addition auf ähnliche Art untersuchen könne, ob man richtig gerechnet habe; z. E. wenn vier Zahlen addirt worden sind, und man von ihrer Summe eine von diesen vieren abzieht, so erhält man die Summe der übrigen drey Zahlen. Subtrahirt man nun von dieser Summe eine von diesen 3 Zahlen, so bekommt man die Summe der übrigen zwey Zahlen; und von dieser Summe eine von den zwo Zahlen abgezogen, giebt die andre. So kann man die Addition ohne Wegwerfen der 9 auch prüfen. Ebenfalls kann man eine Prüfung durch zweymaliger Addition eines Exempels anstellen, indem man das erstemal hinauf- und das andremal hinabwärts addirt. Dieses ist die beste Probe. —

§. 36.

Wenn man aus dieser Tabelle z. E. das Product 9×5 finden will; so suche man den einen Factor 9 in der obersten Reihe, und den andern Factor 5 in der äußersten Reihe linkerhand; gehe alsdenn von der 9 gerade herabwärts bis an die 5te Reihe, und von der 5 nach der rechten Hand zu, bis an das Fach, wo beyde Reihen zusammen kommen. Die Zahl 45, die in diesem Fache sich befindet, ist das gesuchte Product. Oder, da $9 \times 5 = 5 \times 9$ ist; so kann man auch von der 5 der obersten Reihe, gerade herab, bis auf die 9te Reihe und von der 9 nach der Rechten zu, bis an das Fach, wo beyde Reihen zusammen treffen,

gehen.

gehen. Und so hat man ebenfalls das Verlangte.

Diese Tafel hat Pythagoras aus Samos, ein griechischer Mathematiker und Philosoph, der seine Wissenschaften meist von den ägyptischen Priestern, wohin er in seinem zwanzigsten Jahre reißte und daselbst bis in sein 40stes Jahr verbliebe, gelernet hat, nebst andern geometrischen Sätzen, wovon an seinem Orte Meldung gethan werden soll, erfunden. Er ist 80 Jahr alt worden, und starb im Jahr der Welt 3500. Man nennt daher besagte Tafel den **Pythagorischen Rechentisch** (abacus Pythagoricus).

§. 38.

$9000 \times 700 = 9000 \times 7 \times 100 = 9 \times 1000 \times 7 \times 100 = 9 \times 7 \times 1000 \times 100 = 9 \times 7 \times 100000 = 63 \times 100000 = 6300000$. Nun steht in der Zahl 9000 die Ziffer 9 in der dritten Ordnung, und die 7 in der Zahl 700 in der zweyten: Aber nach (28) kann man die Ordnung jeder Ziffer durch eine über ihr geschriebene kleinere Ziffer andeuten: also ist $9000 = \overset{3}{9}$; und $700 = \overset{2}{7}$; Mithin $9000 \times 700 = \overset{3}{9} \times \overset{2}{7} = \overset{5}{63}$; folglich steht die 3 des Products 9000×700 in der 5ten Ordnung, oder nach der 3 müssen 5 Nullen folgen, (25) welches in dem oben erhaltenen Producte $9000 \times 700 = 6300000$ auch so ist.

§. 39. I. Fall.

In der Ausübung kann man sich ebenfalls auch einer solchen Abkürzung, wie bey der Addition, bedienen. Man braucht nämlich nicht jedes einzelne Product hinzuschreiben, sondern nur die niedrigste Ziffer desselben unter die Ziffer von der es herrührt, zu setzen, und die nächste höhere in Gedanken zu nächst folgenden Producte hinzuzurechnen. So ergiebt sich das ganze Product, wie im Buche 313065, das mit H bezeichnet ist, und = 34785 × 9, wovon 34785 durch A und 9 durch B angedeutet wird, und das erst durch die Addition der einzelnen Producte, die C; D; E; F; G; bezeichnet sind, entstanden ist, auf einmal.

§. 45 und 46.

So ist z. E. das Product

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$$

eine Potenz der 2; denn es besteht aus 8 gleichen Factorn, wovon jeder gleich 2 ist. Die Anzahl oder die Menge dieser gleichen Factoren ist also achte, und folglich der Grad dieser Potenz. Weil sie nun aus acht gleichen Factoren, jeder = 2, besteht, so heißt sie die 8te Potenz der 2, so wie 2 dessen Wurzel oder auch die erste Potenz. Will man aber diese Potenz kurz ausdrücken, so sezt man oben an der Wurzel 2 rechter Hand eine kleine Ziffer ^{8}, die den Grad der Potenz ausdrückt; und also würde man diese 8te Potenz der 2 so schreiben:

$$2^8.$$

Dies

Dies hat Cartesius, ein gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts scharfsinniger Philosoph und Mathematiker, zuerst eingeführt; und es heißt weiter nichts anders, als man soll ein Product machen, das aus 8 gleichen Factoren, jeder so groß wie die 2, besteht. Man muß also 2^8 nicht $= 2 . 8$ lesen, sondern $2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2$; Und was man hier bey dieser Potenz zu beobachten hat, das hat man bey jeder zu thun.

In den vor Cartesius herausgekommenen mathematischen Schriften findet man eine andere Benennung, als die izt gebräuchliche. Um nur einen vorläufigen Begrif von der damaligen Rechnung der Potenzen, welche die Cossische Rechnung hieß, zu geben, wird es genug seyn, etwas von ihren Kunstwörtern und Zeichen zu sagen.

die	hies	wurde bezeichnet durch	ihre Wurzel aber durch
2te Potenz	Zensus	Z	℞.
3te Potenz	Cubus	C	℞ C.
4te Potenz	Zensizensus	Zz	℞ Zz
5te Potenz	Surdesolidum	Sz	℞ Sz
6te Potenz	Zensicubus	ZC.	℞ ZC.
7te Potenz	Bißurdesolidum	Bß	℞ Bß
8te Potenz	Zensizenzensus	Zzz	℞ Zzz
9te Potenz	Cubicubus	CC	℞ CC,
10. Potenz	Zensisurdesolidum	Zß.	℞ Zß

u. s. f.

Dergleichen Bezeichnung bedienten sich besonders die deutschen **Cossisten.** Bey andern war sie etwas verändert, wovon man unter andern Clavii Algebram (Romae MDCVIII, 4) nachsehen kann.

Aber diese Kunstwörter sind der Unbequemlichkeit wegen abgeschaffet, und nur bey der 2ten, 3ten und 4ten Potenz, die besondern Namen **Quadrat, Cubus** und **Biquadrat** beybehalten worden; und man sagt daher, z. E. von

$$2^8$$

lieber, daß sie die 8te Potenz der 2, als daß sie der Zensizenzensus der 2 sey. Dem aber ohngeachtet hat neuerlich Herr **Marpurg** in seinen **Anfangsgründen des Progreßionalcalculs** sich anderer Namen bedient. Ich glaube aber nicht, daß er Nachfolger finden wird.

§. 47.

Wenn man aus einer Zahl, (z. E. aus 24295,) die Quadratwurzel ziehen soll, so heißt dies nichts anders, als man soll diese Zahl (24295) als ein Quadrat ansehen, und eine Zahl suchen, welche, wenn sie mit sich selbst multiplicirt wird, die gegebene Zahl (24295) hervor bringt.

Will man aber die Cubicwurzel aus einer Zahl herausziehen, so sieht man diese Zahl als die 3te Potenz oder Cubus an, und sucht so eine Zahl, welche, wenn man sie dreymal mit sich selbst multiplicirt, die gegebene Zahl hervorbringt. Also

heißt

heißt überhaupt, die Wurzel eines gewissen Grades (z. E. die Wurzel der 5ten, 6ten ꝛc. Potenz) aus einer Zahl ziehen, so viel: Man sieht diese Zahl (woraus nämlich die Wurzel gezogen werden soll) als eine Potenz selbigen Grades an, und sucht so eine Zahl, welche, wenn sie so vielmal mit sich selbst multiplicirt wird, als der Grad der Potenz anzeigt, die gegebene Zahl hervorbringt.

§. 48.

$\sqrt{9}$ deutet an, daß man aus der 9 die Quadratwurzel ziehen soll.

Also ist 9 als ein Quadrat zu betrachten (47); und aus (43) ist bekannt, daß die Quadratwurzel der 9, = 3 ist; mithin $\sqrt{9} = 3$. Auf gleiche Art zeigt $\sqrt[3]{64}$ an, daß aus der 64, die Cubicwurzel gezogen werden soll; Aber aus (44) ist bekannt, daß 4 die Cubicwurzel der 64 ist; Also ist $\sqrt[3]{64} = 4$.

§. 50.

Z. E. $500^2 = 500 \times 500 = 5 \times 5 \times 100 \times 100 = 25 \times 100 \times 100 = 25 \times 10000 = 2500$00 Also ist das Quadrat von 500 so viel, als wenn 5 allein wäre quadrirt an diesem Quadrat vier Nullen, nämlich noch einmal so viel Nullen, als an der 5 allein stunden, geschrieben worden. $70000^3 = 70000 \times 70000 \times 70000 = 7 . 10000 \times 7 . 10000 \times 7 . 10000 = 7 . 7 . 7 \times 10000 . 10000 . 10000 = 7^3 \times 10000^3$

 $= 7^3$.

$= 7^3 . 1000000000000 = 343 . 1000000000000$ $= 343000000000000$: Mithin ist 70000 cubirt, eben so viel, als wenn 7 alleine wäre cubirt, und an diesen Cubus 12 Nullen, nämlich dreymal so viel Nullen, als an der 7 allein stunden, geschrieben worden.

Nun kann man nach (28) statt 70000 schreiben

$$\overset{4}{7};$$

Also $70000^3 = (\overset{4}{7})^3$; aber $70000 = \overset{4}{7}$ cubirt, ist so viel als 7 cubirt mit 12 Nullen; Und über eine Ziffer, nach der 12 Nullen folgen, darf man nur blos 12 schreiben; Also $(\overset{4}{7})^3 = \overset{12}{7^3} = \overset{12}{343}$; man hätte auch statt der hier zum Beyspiel genommenen Ziffern, andre nehmen können: also ist der hier geführte Beweis allgemein; und erhellet überhaupt: daß, wenn an einer oder mehrern Ziffern rechter Hand Nullen stehen, und diese Zahl quadrirt werden soll, es eben so viel ist, als wenn die Ziffern allein quadrirt, und an dieses Quadrat rechter Hand noch einmal so viel Nullen, als zur Rechten an den Ziffern allein waren, gesezt würde: Oder, das Quadrat einer Zahl von einer gewissen Ordnung, ist als eine gewisse Menge von Einern zu betrachten, die auf die doppelte Ordnung erhöhet ist. Und wenn eine Zahl, die durch eine oder mehr Ziffern, nach welchen rechter Hand Nullen stehn, ausgedrückt ist, cubirt werden soll, so darf man nur die Ziffern cubiren, und an diesen Cubus

bus rechter Hand dreymal so viel Nullen schreiben, als zur Rechten der Ziffern allein stunden: Oder, man kann den Cubus einer Zahl von gewisser Ordnung als eine Menge von Einern ansehen, die auf die dreyfache Ordnung erhöhet ist.

§. 51.

Nach dem Gesetze, nach welchem wir die Zahlen durch Ziffern ausdrücken, kann man jede Zahl, z. E. 64327, so schreiben, nämlich:

$$64327 = 60000 + 4000 + 300 + 20 + 7$$

Aber nach (37) ist

$$60000 = 6 . 10000$$
$$4000 = 4 . 1000$$
$$300 = 3 . 100$$
$$20 = 2 . 10$$
$$7 = 7$$

Mithin ist $60000 + 4000 + 300 + 20 + 7 = 6 . 10000 + 4 . 1000 + 3 . 100 + 2 . 10 + 7$

Nun ist

$$10000 = 10 . 10 . 10 . 10 = 10^4$$
$$1000 = 10 . 10 . 10 = 10^3$$
$$100 = 10 . 10 = 10^2$$
$$10 = 10 = 10^1$$

Also

$$6 . 10000 + 4 . 1000 + 3 . 100 + 2 . 10 + 7 = 6 . 10^4 + 4 . 10^3 + 3 . 10^2 + 2 . 10^1 + 7$$

§. 53.

§. 53.

Z. B. $\frac{3}{24}$ zeigt an, daß das Ganze in 24 gleiche Theile getheilt worden ist, und drey solche Theile genommen sind. Sieht man so einen vier und zwanzigsten Theil des Ganzen, als die Einheit an, so enthält der Bruch $\frac{3}{24}$, d. i. $3 \cdot \frac{1}{24}$, drey solche Einheiten; und ist also in diesem Fall eine ganze Zahl die aus drey Einheiten besteht; und so viel Einheiten hat auch der Zähler 3.

Wäre das Ganze ein Thaler, so wäre dieser Bruch $\frac{3}{24}$ Thaler. Aber es ist bekannt, daß wir den vier und zwanzigsten Theil vom Thaler einen Groschen nennen. Demnach ist der Bruch $\frac{3}{24}$ Thaler so viel als 3 Groschen: mithin eine ganze Zahl.

§. 55.

Z. E. der Bruch $\frac{1}{3}$ zeigt, daß man den dritten Theil vom Ganzen genommen hat; und der Zähler 1 ist auch der dritte Theil vom Nenner 3.

Der Bruch $\frac{4}{5}$ deutet an, daß von dem Ganzen ein Stück genommen worden ist, das so groß ist, als das Viersache des fünften Theils des Ganzen; und der Zähler 4 ist auch das Vierfache des fünften Theils des Nenners 5: denn dieser 5te Theil ist $= 1$.

§. 58.

Bey der Division kann man die Frage aufwerfen, wie denn der Quotient beschaffen sey, wenn eine kleine Zahl durch eine große zu dividiren ist?

Aus dem Begriffe der Division sieht man leicht ein, daß dieser Quotiente keine ganze Zahl seyn könne. Es sey z. B. 7 durch 12 zu dividiren. Es kann also die 12 in der 7 nicht ein oder etlichemal enthalten seyn; sondern nur ein Stück von der 12. Nun hat die Zahl 12, zwölf Einheiten, und die Zahl 7, sieben Einheiten. Man sieht also, daß die Zahl 7, sieben Einheiten als gleiche Theile der Zahl 12, in sich begreift; Mithin macht ein Stück von der Zahl 12, daß sieben Einheiten als sieben gleiche Theile enthält, die Zahl 7, aus; oder dieses Stück ist eben so groß als die Zahl 7; und folglich kann man die Zahl 7, als ein Bruch von der Zahl 12 ansehen, der zum Nenner 12, und zum Zähler 7, hat. Demnach zeigt der Bruch $\frac{7}{12}$ an, was für ein Stück der Zahl 12, in der Zahl 7 enthalten ist. Also ist er der Quotiente den die Zahl 7 durch die Zahl 12 dividirt, giebt. Bey dieser Division kann man nun nicht fragen **wie vielmal** steckt die 12 in der 7? sondern **was für ein Theil** der Zahl 12 ist die Zahl 7? dieser ist nämlich so groß, als der 12te Theil der Zahl 12, siebenmal genommen, oder wie das Siebenfache des 12ten Theils der Zahl 12, d. i. 7. Der Sprachgebrauch verstattet zwar auch, daß man die erste Frage, wie vielmal nämlich 12 in 7 steckt, durch sieben zwölftelmal beantworten kann. Aber die andre Frage ist der Sache angemeßner. Alle diese Schlüsse gelten noch, wenn man für 7 und 12 jede andre Zahl sezt. Denn hätte man z. B. 3 und 4 genommen, um

die 3 durch die 4 zu dividiren, so erhellet von selbst, daß eben diese Schlüsse gelten; und daß also die 3 ein Stück von der 4 ist, das so groß ist, als das Dreyfache des 4ten Theils der Zahl 4; oder, wie man gewöhnlich sagt: daß die 4 in der 3, $\frac{3}{4}$ mal steckt. Also ist ebenfalls $3 : 4 = \frac{3}{4}$ so wie $7 : 12 = \frac{7}{12}$ ist.

§. 60 und 61.

Aus dem 58. und 59. §. erhellet, daß Brüche und Quotienten einerley sind. Also ist z. E. $\frac{2}{5} = 2 : 5$; ferner $\frac{24}{6} = 24 : 6$; $\frac{17}{3} = 17 : 3$. Will man daher finden, wie vielmal ein uneigentlicher Bruch das Ganze enthält; so darf man nur den Nenner desselben, in seinen Zähler dividiren. Ist nun der uneigentliche Bruch so beschaffen, daß er nicht nur allein das Ganze ein oder etlichemal ganz, sondern überdies noch ein Stück vom Ganzen, enthält, so bekommt man durch die würkliche Division seines Nenners in den Zähler erst eine ganze Zahl, die die Ganzen anzeigt und nicht der völlige Quotiente ist, sondern es bleibt ein Rest (17. §.) der ein Theil von dieses Bruchs Zähler und kleiner als dessen Nenner ist. Weil aber dieser ganze Zähler durch den Nenner dividirt werden soll; so muß auch der Rest durch eben diesen Nenner dividirt werden: folglich ist er ein Bruch, dessen Zähler dieser Rest selbst und der Nenner der, mit dem man dividirt hat, ist. Daher kann man einen solchen uneigentlichen Bruch durch eine ganze Zahl, die anzeigt, wie vielmal er das Ganze in

sich

sich begreift, und das Stücke vom Ganzen das überdies noch enthalten ist, durch einen eigentlichen Bruch, der an diese ganze Zahl gehängt wird, ausdrücken. So ist

$$\frac{17}{3} = 5 + \tfrac{2}{3} = \frac{15}{3} + \tfrac{2}{3}$$

Eben so ist auch

$\frac{29}{6} = 4 + \frac{5}{6} = \frac{24}{6} + \frac{5}{6}$; und da $29 = 18 + 11$; so ist auch $\frac{29}{6} = \frac{18 + 11}{6} = \frac{18}{6} + \frac{11}{6} = 3 + \frac{11}{6} = 3 + 1 + \frac{5}{6} = 4 + \frac{5}{6} = 18 : 6 + 11 : 6 = (18 + 11) : 6 = 29 : 6.$

Hieher nun gehört der Umstand des XIII. Abs. des 40. §. bey der Division zwoer ganzen Zahlen; nämlich wenn zwo ganze Zahlen von der Beschaffenheit zu dividiren gegeben sind, daß man zwar eine ganze Zahl zum Quotienten erhält, die aber nicht der völlige Quotiente ist (§. 17.) sondern etwas zum Reste bleibt. Am angeführten Orte war 7654 durch 37 zu dividiren, und man erhielt die Zahl 206 zum Quotienten, wodurch aber nicht der völlige Quotient gefunden ward, sondern es blieb der Rest 32, der daselbst mit P bezeichnet ist. Dieser ist ein Bruch der zum Zähler den Rest 32, und zum Nenner den Divisor 37 hat, und welcher Bruch noch an 206 gehängt werden muß.

Denn

Denn $7654 : 37 = \frac{7654}{37} = 206 + \frac{32}{37}$; Also hat man hier einen uneigentlichen Bruch, der das Ganze 206mal und überdies $\frac{32}{37}$ vom Ganzen, in sich begreift. Man muß also bey solchen Fällen (XIII. Abs. des 40. §.) der Division, den Quotienten in ganzen Zahlen, so genau als möglich, suchen, und daran einen Bruch hängen, dessen Zähler der Rest, und der Nenner der Divisor ist. Hieraus nun kann man leicht sehen, daß wenn eine ganze Zahl nebst einem eigentlichen Bruche in einem uneigentlichen verwandelt werden soll, man die ganze Zahl mit dem Nenner des eigentlichen Bruchs multipliciren und zu diesem Product seinen Zähler addiren muß, da dann die Summe der Zähler ist, der zum Nenner den hat, der dem eigentlichen Bruche zugehört. Und dies ist eben das, als wenn man die Probe der Division zwoer ungleichen Zahlen in dem Falle des XIII. Abs. des 40. §. machen wollte.

§. 62.

Z. E. des Bruchs $\frac{1}{2}$ Nenner mit 2 multiplicirt giebt

$\frac{2}{2 . 2} = \frac{1}{4}$; und $\frac{1}{4}$ ist gewiß halb so groß als $\frac{1}{2}$. Eben so ist die Hälfte von $\frac{1}{8} = \frac{1}{8 . 2} = \frac{1}{16}$;

das

das 3tel von $\frac{1}{4}, = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{12}$;

das 8tel von $\frac{2}{3}, = \frac{2}{3 \cdot 8} = \frac{2}{24}$;

das 5tel von $\frac{1}{6} = \frac{1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{30}$;

Denn, um nur bey $\frac{1}{6}$ stehen zu bleiben, so ist erst das Ganze in 6 gleiche Theile getheilt und davon einer genommen worden. Theilt man aber eben das Ganze in 6 × 5 gleiche Theile, und nimmt davon nur einen, so erhält man ohnstreitig einen fünfmal kleinern Bruch.

§. 63.

Z. E. des Bruchs $\frac{1}{4}$ Zähler mit 2 multiplicirt, giebt

$\frac{1 \cdot 2}{4} = \frac{2}{4}$; und $\frac{2}{4}$ ist ohnstreitig doppelt so groß als $\frac{1}{4}$; Man hat nämlich nun noch einmal so viel Theile genommen, als erst, und derselben Größe nicht geändert: Also hat man auch einen noch einmal so großen Bruch erhalten.

§. 64.

Wenn also z. E. der Bruch $\frac{9}{14}$ mit 7 multiplicirt werden soll, so erhält man

$$\frac{9}{14} \times 7 = \frac{9 \cdot 7}{14} = \frac{63}{14} = 4 + \frac{7}{16} \text{ (§. 60.)}$$

Ferner ist

110 $$\frac{20}{31} \times 110 = \frac{20 \,.\, 110}{31} = \frac{2200}{31} = 70 + \frac{30}{31}.$$

Denn durch die Multiplication einer ganzen Zahl in den Zähler eines Bruchs, wird nach (63) derselbe um so vielmal größer als die ganze Zahl Einheiten hat. Das heißt aber nach den Begriffen der Multiplication (7) nichts anders als: er wird dadurch multiplicirt.

Will man z. B. $\frac{5}{6}$ durch 8 dividiren, so erhält man $\frac{5}{6} : 8 = \frac{5}{6 . 8} = \frac{5}{48}$

Denn nach (62) wird durch die Multiplication einer ganzen Zahl in den Nenner eines Bruchs, derselbe um so vielmal kleiner als diese Zahl Einheiten hat. Das heißt aber nichts anders als er wird dadurch dividirt (13).

§. 65.

So ist $\frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{3}{4} \cdot 5$ (63) und $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5}{4}$: 5 (nach 62). In leztern Ausdruck aber, findet sich der Ausdruck $\frac{3 \cdot 5}{4}$, und dieser ist, wie jezt da gewesen, $= \frac{3}{4} \cdot 5$; Nun kann man gleiches für gleiches sezen: mithin darf man in den Ausdruck

$$\frac{3 \cdot 5}{4} : 5$$

statt

statt $\frac{3 \cdot 5}{4}$ nur $\frac{3}{4} \cdot 5$ setzen, so erhält man $\frac{3}{4} \cdot 5 : 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} : 5$; Aber $\frac{3 \cdot 5}{4} : 5 = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5}$; folglich auch $\frac{3}{4} \cdot 5 : 5 = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5}$. Nun ist $\frac{3}{4} \cdot 5$ ein Product (64; 7); und aus (16) ist klar, daß, wenn man das Product $\frac{3}{4} \cdot 5$ durch dem einen Factor 5 dividirt, der andre Factor $\frac{3}{4}$ herauskommt; folglich ist

$$\frac{3}{4} \cdot 5 : 5 = \frac{3}{4}$$

Aber $\frac{3}{4} \cdot 5 : 5 = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5}$; Also ist

$$\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4}$$

§. 66.

Z. E. wenn der Zähler des Bruchs $\frac{4}{5}$ durch 2 dividirt werden soll; so ergiebt sich

$$\frac{4 : 2}{5} = \frac{2}{5}$$

Nun ist ohnstreitig $\frac{2}{5}$ halb so groß als $\frac{4}{5}$; also hat man durch dieses Verfahren einen Bruch erhalten, der anzeigt, daß izt nur halb so viel Theile von den an ihrer Größe ungeänderten gleichen Theilen des Ganzen, als erst genommen worden sind; nämlich daß man $\frac{4}{5}$ dadurch halbirt oder durch 2 dividirt hat.

Soll z. B. der Nenner des Bruchs $\frac{1}{12}$ durch 3 dividirt werden; so bekommt man

$$\frac{1}{12:3} = \frac{1}{4}$$

und $\frac{1}{4}$ ist gewiß dreymal größer als $\frac{1}{12}$. Denn indem man 12 durch 3 dividirt, erhält man, weil der Zähler 1 ungeändert bleibt, eine Zahl 4 als Nenner, dessen Zähler eben der vorige ist, und welcher Nenner anzeigt, daß ein und eben das Ganze izt nur in 4 gleiche Theile getheilt worden ist, da es erst in 12 gleiche Theile getheilt war; aber sein vierter Theil ist ohnstreitig dreymal größer als sein zwölfter; nun blieb auch der Zähler ungeändert: Also nimmt man izt einen dreymal größern Theil: Mithin ist der Bruch $\frac{1}{12}$ durch dieses Verfahren dreymal größer oder durch 3 multiplicirt worden. So ist z. B. ferner $\frac{8}{12:6} = \frac{2}{8} = 4$, d. i. der Bruch $\frac{8}{12}$ ist mit 6 multiplicirt worden, indem man seinen Nenner 12 durch 6 dividirte.

Aus diesem §. ergeben sich, außer den in (64) enthaltenen zwo Regeln der Multiplication und Division eines Bruchs mit einer ganzen Zahl, noch zwo andre für eben diese Verfahren. Nämlich ein Bruch wird auch mit einer ganzen Zahl multiplicirt, oder dividirt, nachdem man sie in den Nenner oder Zähler des Bruchs dividirt.

§. 67.

So ist

$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$: Denn $\frac{8:4}{12} = \frac{8}{12}:4$ (nach 66) und $\frac{8:4}{12:4} = \frac{8:4}{12}\cdot 4$ (nach 66) $\frac{8:4}{12} = \frac{8}{12}:4$; folglich $\frac{8:4}{12}\cdot 4 = \frac{8}{12}:4\cdot 4$; und da $\frac{8:4}{12}\cdot 4 = \frac{8:4}{12:4}$; so ist auch $\frac{8:4}{12:4} = \frac{8}{12}:4\cdot 4$; Nun ist $\frac{8}{12}:4$ ein Quotient; und aus (16) ist klar, daß der Divisor 4 mit dem Quotienten ($\frac{8}{12}:4$) multiplicirt den Dividendus $\frac{8}{12}$ giebt: Also ist

$$\left(\frac{8}{12}:4\right)\cdot 4 = \frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4}$$

§. 68.

Z. E. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16} = \frac{24}{32} = \frac{48}{64} = \frac{96}{128}$ u. s. w.

Denn nach (65) ist

$\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 2}{4\cdot 2} = \frac{6}{8} = \frac{6\cdot 2}{8\cdot 2} = \frac{12}{16} = \frac{12\cdot 2}{16\cdot 2} = \frac{24}{32}$ u. s. f.

Nach (67) ist z. E.

$$\frac{180}{360}=\frac{90}{180}=\frac{45}{90}=\frac{15}{30}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$

u. s. w.

Denn nach (67) ist

$$\frac{180}{360}=\frac{180:2}{360:2}=\frac{90}{180}=\frac{90:2}{180:2}=\frac{45}{90}=\frac{15:3}{30:3}$$

$$=\frac{5}{10}=\frac{5:5}{10:5}=\frac{1}{2}=\frac{1:2}{2:2}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{\frac{1}{2}:2}{1:2}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$

u. s. w.

(Diese Art von Brüchen, wie $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$ einer ist, heissen gebrochene Brüche, wovon weiter unten (85) vorkommen wird.)

Es läßt sich also ein Bruch mittelst (65 und 67) auf unzählig viel Arten ausdrücken, ohne daß dadurch sein Werth geändert wird.

Diese Verwandlung der Brüche bringt in der Bruchrechnung vielen Nutzen, wie wir bald sehen werden.

§. 70 und 71.

Bey Aufhebung der Brüche, welche auf (67) sich gründet, muß sich Zähler und Nenner eines Bruchs durch einerley ganze Zahl ohne Rest dividiren lassen. Die Aufhebung der Brüche aber ist zu deutlicher Erkennung des Werths derselben sehr nützlich;

nützlich; daher wird es nicht undienlich seyn, wenn wir, Anfängern zu Gefallen, uns hierbey etwas aufhalten.

Regeln und ihre Gründe zu wissen, nach den man beurtheilen kann, wodurch sich eine Zahl ohne Rest theilen läßt, werden in der Ausübung nicht unnützlich seyn; dergleichen Regeln aber, haben nicht nur alleine bey der Bruchrechnung, sondern auch bey andern Rechnungen, z. E. bey der so genannten welschen Practic, von der die meisten practischen Rechenmeister wohl zu prahlen wissen, aber die Gründe der Rechnungen nicht verstehen, großen Nutzen.

I.

Jede Zahl, deren Ziffer in der Stelle der Einer entweder 0, 2, 4, 6 oder 8 ist, ist durch 2 ohne Rest theilbar.

Beweis. Denn aus der Natur der Zahlen ist bekannt, daß sich die Zehner, Hunderter, Tausender, u. s. f., wie auch 0, 2, 4, 6, 8 durch 2, ohne Rest theilen lassen. Nun besteht jede Zahl entweder aus Einern, oder aus Einer und Zehnern, oder aus Einer, Zehner und Hunderter, oder aus Einer, Zehner, Hunderter und Tausender u. s. w. Hat also eine Zahl in der Stelle der Einer die 0, 2, 4, 6, oder 8, so läßt sich auch die ganze Zahl durch 2 ohne Rest theilen.

II.

Durch 5 läßt sich eine Zahl ohne Rest thei-

theilen, wenn ihre lezte Ziffer rechter Hand entweder o oder 5 ist.

Bew. Alle Zehner, Hunderter, Tausender u. s. f. sind durch 5 ohne Rest theilbar. Mithin auch eine Zahl durch 5, wenn in der Stelle der Einer eine 5 oder o steht.

III.

Eine Zahl ist durch 3 ohne Rest theilbar, wenn sich die Summe ihrer Ziffern die man als schlechte Einer anzusehen hat, durch 3 theilen läßt.

Beweis. Wenn eine Menge von Zehnern oder Hunderten, oder Tausenden, u. s. w. durch drey getheilt werden soll, so bleibt eben so viel übrig, als wenn eine gleiche Menge Einer durch 3 getheilt worden wäre. Z. E. 70 durch 3 dividirt, läßt eben den Rest, als wenn man 7 allein durch drey dividirt hätte; eben den Rest erhält man auch durch die Division der 3 in 700; 7000, u. s. f. Wenn also eine Zahl von mehr denn einer Ziffer durch 3 dividirt werden soll, so muß der Rest, der durch die Division der 3 in diese Zahl heraus kommt, mit dem Reste, der durch die Division der 3 in die Summe der einzeln Ziffern dieser Zahl erhalten wird, einerley seyn. Bleibt kein Rest, so ist also die Zahl durch 3 selbst theilbar.

So ist z. B. 7851 durch 3 theilbar, weil sich der einzelnen Ziffernsumme $= 7 + 8 + 5 + 1 = 21$ durch 3 ohne Rest theilen lassen.

Um durch dieses Exempel Anfängern den Beweis mehr zu erläutern, setze ich voraus, daß, wenn die Summe zwoer oder mehrerer Zahlen, durch 3 theilbar ist, entweder jede dieser Zahlen selbst, oder die Summe der Reste die die Divisionen der 3 in jede dieser Zahlen geben, durch 3 theilbar seyn muß. Von der Wahrheit dieser Voraussetzung, die in des Herrn Hofrath Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik, in 71, 74 und 75. §. der Rechenkunst bewiesen ist, kann man sich leicht selbst durch Beyspiele überführen. Sind 16 und 8 die gegebenen Zahlen, und ihre Summe soll durch 3 theilbar seyn, so muß sich, weil nicht 16 sowohl als 8 durch 3 theilbar ist, die Summe der Reste der Divisionen der 3 in die 16 und auch in die 8 durch 3 theilbar seyn. Aber 16 : 3 läßt den Rest 1; und 8 : 3 den Rest 2, und 2 + 1 ist durch 3 theilbar, also auch 16 + 8.

Unsere z. B. angenommene Zahl aber, war 7851, und die ist gleich der Summe

$$7000 + 800 + 50 + 1.$$

Nun giebt 7000 durch 3 dividirt eben den Rest, als wie die Division der 3 in die 7; 800 : 3 eben den Rest als wie 8 : 3, u. s. w. Also ist die Summe der Reste der Divisionen der 3 in 7000; 800, 50, 1, gleich der Summe der Reste, die man erhält, wenn man 7, 8, 5, 1, durch 3 dividirt. Aber man findet bey würklicher Berech-

nung, daß jede dieser Summen der Reste durch 3 theilbar ist; Also ist sowohl

$7000 + 800 + 50 + 1$ als auch

$7 + 8 + 5 + 1$ durch 3 theilbar, und es bleibt durch diese Division kein Rest: Folglich ist die Zahl

$7851 = 7000 + 800 + 50 + 1$

durch 3 ohne Rest theilbar.

IV.

Wenn die zwey lezten Ziffern rechter Hand einer Zahl sich zusammen durch 4 ohne Rest theilen lassen, so ist die ganze Zahl durch 4 ohne Rest theilbar.

Bew. Alle Hunderter, Tausender, Zehntausender u. s. w. lassen sich durch 4 ohne Rest theilen; und weil eine Zahl entweder aus Einer oder aus Einer und Zehner, oder aus Einer, Zehner und Hunderter, oder aus Einer, Zehner, Hunderter und Tausender u. s. w. besteht: so läßt sich folglich die ganze Zahl durch 4 ohne Rest theilen, wenn die Zehner sammt den Einern dadurch ohne Rest theilbar sind.

So läßt sich z. E. 1772 durch 4 ohne Rest theilen, weil es bey 72 geschehen kann.

V.

Hat eine Zahl rechter Hand drey solche Endziffern, daß diese sich durch 8 ohne Rest thei-

theilen lassen; so ist die ganze Zahl durch 8 ohne Rest theilbar.

Bew. Die Tausender, Zehntausender, Hunderttausender, u. s. w. lassen sich durch 8 ohne Rest theilen; Sind nun auch insgesammt die Hunderter, Zehner und Einer einer Zahl durch 8 ohne Rest theilbar; so kann dadurch folglich die ganze Zahl ohne Rest getheilt werden.

So läßt sich z. E. 13896 durch 8 theilen, weil 896 dadurch getheilt werden kann.

VI.

Hat eine Zahl zu Ende rechter Hand 0; 00; 000; 0000; 00000; u. s. w.; so ist sie durch 10; 100; 1000; 10000; 100000; u. s. f. ohne Rest theilbar.

Bew. Denn so eine Zahl kann man als ein Product ansehen, davon der eine Factor eine 1 mit so viel Nullen, als an ihr rechter Hand befindlich sind, und der andre Factor eine Zahl, die aus den übrigen Ziffern der Zahl, an der rechter Hand die Nullen sind, zusammen gesezt ist: Folglich ist die Zahl durch 10; 100; 1000 u. s. f. ohne Rest theilbar, nachdem sie zur Rechten 0, 00, 000 u. s. w. hat (16). So ist z. E. 678000 = 678 . 1000 und also durch 1000 theilbar.

VII.

Durch 9 kann man jede Zahl ohne Rest theilen, wenn die Summe der Ziffern, als schlech-

schlechte Einer betrachtet, dadurch theilbar ist.

Bew. Dieser Satz beruht mit dem, §. III. auf einerley Grund. Jede Menge von Zehnern, oder Hunderten und s. w. durch 9 getheilt, läßt eben den Rest, als der bey der Division der 9 in eine gleiche Menge von Einern bleibt. Summirt man also die Ziffern einer Zahl und dividirt sie durch 9, so muß der Rest mit dem einerley seyn, den die Zahl durch 9 dividirt, selbst giebt. Bleibt nun kein Rest, so ist folglich die Zahl durch 9 theilbar.

Z. E. 8793 ist durch 9 theilbar, weil die Summe $8 + 7 + 9 + 3 = 27$ sich durch 9 ohne Rest theilen läßt.

VIII.

Eine Zahl die nicht nur durch eine gewisse Zahl, sondern auch noch durch eine andre Zahl zugleich ohne Rest theilbar ist, ist auch so durch das Product dieser beyden Zahlen, theilbar.

Bew. Läßt sich eine Zahl z. B. in 2 und auch zugleich in 3 aliquote Theile theilen, so kann sie auch in $6 = 2 \times 3$ aliquote Theile getheilt werden. Oder überhaupt: Man stelle sich unter A die Zahl vor, die durch eine Zahl, die n heißen mag, und zugleich auch durch eine andre Zahl, so wir m nennen wollen, ohne Rest theilbar ist. A, m, n, können jede beliebige Zahl bedeuten, wenn sie nur so unter einander beschaffen sind, daß, wie man

hier

hier voraussezt, die Zahl, die man statt A braucht, sich sowohl durch die Zahl, die statt n, und auch zugleich durch die Zahl, die für m gesezt wird, ohne Rest theilen läßt. Indem man aber A durch n dividirt, muß man, nach der Voraussetzung, zum Quotienten eine ganze Zahl, die Q heißen mag, und durch die Division der Zahl m in A ebenfalls eine ganze Zahl, die q heißen soll, erhalten, daß also

$$\frac{A}{n} = Q \text{ und } \frac{A}{m} = q$$

Gesezt nun, A wäre durch das Product $n \times m$ nicht ohne Rest theilbar, so erhält man zwar durch die Division des Products $n \times m$ in A eine ganze Zahl, die wir P nennen wollen, aber es bleibt auch ein Rest $= R$. Also ist $\frac{A}{n.m} = P + \frac{R}{n.m}$ (60 und dessen Erl.)

Aber $A = n.Q = m.q = n.m.P + R$ (16 und 61.)

Also ist

$$n.Q = n.m.P + R$$

Da nun, wie leicht von selbst einzusehen ist, man gleiche Quotienten erhält, wenn man gleiche Zahlen dividirt, so darf man nur

$$n.Q = n.m.P + R$$

mit

mit n dividiren, so erhält man

$$\frac{n.Q}{n} = \frac{n.m.P + R}{n} = \frac{n.m.P}{n} + R : n =$$

$$m.P + \frac{R}{n.} = Q$$

Eben auf diese Art ergiebt sich,

$$n.P + \frac{R}{m} = q$$

Folglich wären Q und q keine ganze Zahlen, wenn A dividirt durch n . m zum Quotienten keine ganze Zahl giebt. Da aber Q und q, nach der Voraussetzung, würklich ganze Zahlen sind; so muß folglich A durch n . m ohne Rest theilbar seyn.

IX.

Aus dem VIII. §. lassen sich leicht einige Folgerungen ziehen. Z. E. wenn eine ganze Zahl durch 2 und auch zugleich durch 3 oder durch 10, 100 ꝛc. und auch zugleich durch 9, u. s. w. theilbar ist; so ist sie auch durch 6, 90, 900 u. s. f. theilbar.

Mehreres von der Theilbarkeit der Zahlen kann in von Clausbergs **demonstrativischer Rechenkunst** im 2ten Theile nachgelesen werden.

X.

Diese bisher beschriebenen Kennzeichen nun, lassen sich leicht bey den Brüchen anwenden. Denn wenn Zähler und Nenner eines Bruchs so beschaffen

fen

fen sind, wie es einer von den Sätzen I; II; III; IV; V; VI; VII; IX; erfodert, so läßt sich auch der Bruch darnach aufheben. Z. E. es sey der Bruch $\frac{128}{356}$ aufzuheben; so sieht man leicht, daß dies nach §. IV. geschehen kann. Denn die zwey lezten Ziffern des Zählers sowohl als des Nenners, sind durch 4 theilbar; folglich auch Zähler und Nenner; und also läßt sich der Bruch durch 4 aufheben.

XI.

Wenn man nach diesen Kennzeichen einen Bruch aufhebt, so erhält man zwar einen kleinern Zähler und Nenner als der Bruch erst hatte, aber dieser Zähler und Nenner ist dadurch nicht allemal zugleich so beschaffen, daß sich beyde nicht durch irgend eine Zahl ohne Rest theilen ließen. Man kann hierdurch auf drey, vier und mehr neue Zähler und Nenner eines und eben desselben Bruchs kommen, ehe man so einen Zähler und Nenner für ihn erhält, daß beyde durch einerley Zahl nach diesen beschriebenen Kennzeichen nicht theilbar sind. Man muß also hierbey von diesen Kennzeichen, die, so sich anbringen lassen, so lange anzubringen suchen, als es angeht. Aber alsdann ist doch noch die Frage, ob sich ein und eben dieser Bruch nicht weiter aufheben läßt, d. i. ob er nicht durch einen noch kleinern Zähler und Nenner ausgedrückt werden kann? Diese Frage zu beantworten, müssen wir eine allgemeine Regel, von Aufhebung

hebung der Brüche zu geben suchen. Dies soll bald geschehen. Ehe wir es aber thun, wollen wir zur Erläuterung des, was in diesem §. gesagt ist, ein Beyspiel beyfügen.

Es sey der Bruch

$$\frac{6081075000}{17775450000}$$

aufzuheben. Wer die in I — IX. §. enthaltenen Regeln wohl inne hat, der wird dies, folgendermaßen leicht verrichten können.

1000 (VI §) 5 (II §) 5

$$\frac{6081075000}{17775450000} \Big| \frac{6081075}{17775450} \Big| \frac{1216215}{3555090} \Big|$$

9 (VII §) 9 3 (III §)

$$\frac{243243}{711018} \Big| \frac{27027}{79002} \Big| \frac{3003}{8778} \Big| \frac{1001}{2926};$$ Oder noch kürzer:

9000 (§ IX) 5 45 (IX §) 3

$$\frac{6081075000}{17775450000} \Big| \frac{675675}{1975050} \Big| \frac{135135}{395010} \Big| \frac{3003}{8778} \Big| \frac{1001}{2926}$$

So weit kann man diesen Bruch nach den beschriebenen Kennzeichen aufheben; und man sieht, daß man von diesen Kennzeichen die, die dazu geschickt waren, dabey so oft als möglich angebracht hat. Nun kann man noch fragen, ob sich der Bruch

$$\frac{1001}{2926} = \frac{6081075000}{17775450000},$$

noch

noch weiter aufheben läßt. Nach der allgemeinen Regel der Aufhebung der Brüche, zu der wir gleich kommen werden, läßt er sich noch durch 77, wie folget, aufheben.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{77} \\ 1001 & 13 \\ \hline 2926 & 38 \end{array}$$

Also ist $\frac{6081075000}{17775450000} = \frac{13}{38}$.

XII.

Die Zahl, wodurch jede von zwey oder mehr Zahlen ohne Rest getheilt werden können, heißt das **gemeinschaftliche Maas**, oder auch der **gemeinschaftliche Theiler** dieser zwey oder mehrern Zahlen.

So ist 2, der gemeinschaftliche Theiler von den beyden Zahlen 4 und 6; denn man kann sowohl 4, als auch 6 durch 2 ohne Rest theilen. Eben so ist 6 das gemeinschaftliche Maas oder der gemeinschaftliche Theiler von 6, 12, 18, 24, 30, 36, ꝛc.

Die größte Zahl wodurch sich etliche Zahlen ohne Rest theilen lassen, wird der **größte gemeinschaftliche Theiler** oder das **größte gemeinschaftliche Maas** dieser Zahlen genennt. So ist 2 der größte gemeinschaftliche Theiler der beyden Zahlen 6 und 4. Auch ist 5 der größte gemein-

gemein-

meinschaftliche Theiler der Zahlen 75, 20, 25, 15, 30.

XIII.

Jede Zahl ist durch sich selbst theilbar. Nun sind einige Zahlen so beschaffen, daß sie sich durch andre von ihnen und der Einheit verschiedene Zahlen ohne Rest theilen lassen. Diese nennt man **theilbare Zahlen** (numeros divisibiles). Die Zahlen nun, die ein gemeinschaftliches Maas oder mehrere haben, werden **unter sich theilbare Zahlen** (numeri inter se divisibiles). Dergleichen sind 6 und 9; beyde haben 3 zum gemeinschaftlichen Maas; auch 10; 20; 30; 40; die zum gemeinschaftlichen Maas so wohl 2, als auch 5 und 10 haben.

Zahlen die durch 2 ohne Rest theilbar sind, heissen **gerade Zahlen**, (numeri pares). Solche sind 2, 4, 6, 8, u. s. w.

Manche Zahlen haben außer der in vorigem § gedachten Beschaffenheit, auch die, daß sie durch keine von ihnen und der Einheit verschiedenen Zahlen ohne Rest theilbar sind, und die heißen **Prim- oder einfache Zahlen**, (numeri primi). Von dieser Art sind 2, 3, 5, 7, 11 u. s. m.

Solche Zahlen, die kein gemeinschaftliches Maas haben, werden **Primzahlen unter sich** (numeri inter se primi) genennt.

So sind z. B. 4, 9, 10, Primzahlen unter sich.

Alle die Zahlen, die sich nicht durch 2, ohne Rest theilen lassen, sondern wenn sie durch 2 dividirt werden, der Rest 1 bleibt, nennt man **ungerade Zahlen**, (numeros impares).

Dergleichen sind 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, u. s. f.

XIV.

Durch das gemeinschaftliche Maaß, das zwo Zahlen haben, ist ihre Summe so wohl als ihre Differenz ohne Rest theilbar.

Beweis. Dividirt man jede dieser Zahlen mit ihren gemeinschaftlichen Maaße, so muß der Quotiente, den man dadurch erhält, eine ganze Zahl seyn (§. XII.). Ist nun die Summe dieser Zahlen durch eben diesen gemeinschaftlichen Theiler nicht ohne Rest theilbar, daß man also keinen Quotienten genau in ganzen Zahlen ausgedrückt, erhält; so folgt (nach 60 und dessen Erl.) daß das gemeinschaftliche Maas eine von den beyden Zahlen nicht ohne Rest theilt, oder daß einer von den beyden vorhin genannten Quotienten keine ganze Zahl ist; welches aber der Voraussetzung und dem XII. §. widerspricht: Folglich muß dieser Zahlen gemeinschaftliche Maas auch ihre Summe ohne Rest theilen.

Bey zwo ungleichen Zahlen kann man die grössere allemal als ein Ganzes, als eine Summe betrachten, wovon die kleine Zahl ein Theil, und die Differenz dieser beyden Zahlen, der andre Theil ist. Hat nun die Summe oder größere Zahl und der

eine Theil davon, oder die kleine Zahl, ein gemeinschaftliches Maas, so hat, erwiesenermaßen der andere Theil oder die Differenz dieser zwo Zahlen eben dasselbe gemeinschaftliche Maas.

Ex. $564 : 6 = 94$ und $42 : 6 = 7$; Also $(564 + 42) : 6 = 606 : 6 = 564 : 6 + 42 : 6 = 94 + 7 = 101$, eine ganze Zahl, und $(564 - 42) : 6 = 522 : 6 = 564 : 6 - 42 : 6 = 94 - 7 = 87$ ebenfalls eine ganze Zahl.

§. XV.

Das größte gemeinschaftliche Maas zwoer unter sich theilbaren Zahlen, ist auch das größte ihrer Summe oder Differenz. (XIV, XII. §.)

Das größte gemeinschaftliche Maas, das zwo Zahlen haben, eben das hat auch ein Vielfaches der einen von diesen beyden Zahlen, und die andre, wie auch die Summe oder Differenz dieses Vielfachen und der andern Zahl. (XIV. §.)

Ex. $564 : 6 = 94$; und $3 \cdot 42 : 6 = 126 : 6 = 21$; Aber $(564 + 126) : 6 = 690 : 6 = 564 : 6 + 126 : 6 = 94 + 21 = 115$, eine ganze Zahl, und $(564 - 126) : 6 = 438 : 6 = 564 : 6 - 126 : 6 = 94 - 21 = 73$, auch eine ganze Zahl.

Das größte gemeinschaftliche Maas, das die Summe oder Differenz zwoer ungleichen Zahlen, und eine von diesen beyden Zahlen, hat, eben das hat auch zugleich die andre.

§. XVI.

Theilt eine Zahl eine andre genau, so ist die erstere Zaal selbst der größte gemeinschaftliche Theiler dieser zwo Zahlen.

Z. E. da 9 die Zahl 36 ohne Rest theilt, so ist 9, das größte gemeinschaftliche Maas der zwo Zahlen 9 und 36.

§. XVII.

Das größte gemeinschaftliche Maas zwoer ungleichen Zahlen zu finden.

Aufl. I. Man dividire die kleinere in die grössere. Bleibt kein Rest, so ist die kleinere selbst das größte gemeinschaftliche Maas.

II. Bleibt aber ein Rest, so dividire man damit die kleinere Zahl. Geht nun dieser Rest in der kleinern Zahl auf, so ist er selbst das größte gemeinschaftliche Maas Z. E. es sind die Zahlen, 8, und 36 gegeben; Dividirt man 36 durch 8, so bleibt zum Rest 4, der in 8 aufgeht, und das größte gemeinschaftliche Maas der Zahlen 8 und 36 ist.

III. Geht aber dieser Rest, den man behielte, wenn man die kleine Zahl in die große dividirte, und den ich den ersten nennen will, in der kleinern Zahl nicht auf, so bleibt wieder ein Rest, der der zweyte heißen soll. Diesen nun, dividire man wieder in den ersten Rest; und erhält man hierdurch noch keinen Quotienten genau in ganzen Zah-

len, so muß ein Rest, der dritte bleiben, welchen man ebenfalls in den zweyten zu dividiren hat, und auf diese Art so lange fortfahren muß, bis man endlich einen Rest erhält, der entweder $= 1$ oder sonst eine Zahl ist, die in dem nächst vorhergehenden Rest aufgeht. Im ersten Fall sind die vorgegebenen Zahlen Primzahlen unter sich; (XIV. §.) im andern ist der lezte Rest das größte gemeinschaftliche Maas der vorgegebenen beyden ungleichen Zahlen. Der lezte Rest aber, er mag $= 1$ oder > 1 seyn, ist der so vielte Rest weniger eins, so viel man Divisionen gemacht hat.

Ex. Es seyen die Zahlen 3735 und 4815 gegeben; man soll ihren größten gemeinschaftlichen Theiler suchen; welchen man nach unserer Auflösung folgendermaßen findet:

```
3735 4815 | 1
     3735 |
1.Rest 1080 | 3735 | 3
              3240 |
     2.Rest 495 | 1080 | 2
                   990 |
          3.Rest 90 | 495 | 5
                      450 |
               4.Rest 45 | 90 | 2
                           90 |
                            0
```

Also wäre 45 als der 4te Rest das größte gemeinschaftliche Maas 3735 und 4815. Man hat hier 4 Reste und fünf Divisionen. Auf die Quotienten hat man weiter nicht zu merken als vielmehr auf die Reste.

Es ist bey der Ausübung nicht nöthig, die Zahl der Reste, wie hier geschehen, zu bemerken.

Beweis. I. Erhellet von selbst, aus dem XVI. §.

II. Ergiebt sich so: Weil der Rest, der durch die Division der kleinen Zahl in die große bleibt, und den ich in III. der Auflösung dieses §. den ersten genannt habe, die Differenz der großen Zahl und eines Vielfachen der kleinen, ist: so folgt aus dem XV. §. daß diese Differenz oder erste Rest und die beyden gegebenen Zahlen, mit einander einerley größtes gemeinschaftliches Maas haben. Wenn nun der erste die gegebene kleinere Zahl ohne Rest theilt, so ist er beyder größtes gemeinschaftliches Maas (§. XVI.). Also außerdem auch noch das größte von einem Vielfachen der kleinern Zahl: (XV. §.) Mithin ebenfalls auch der Summe die er mit diesem Vielfachen macht (§. XV.), und welche der gegebenen größern Zahl gleich ist: (12) Folglich ist er das größte gemeinschaftliche Maas der beyden vorgegebenen Zahlen.

III. Veroffenbahret sich auf eben die Art. Nämlich das größte gemeinschaftliche Maas der beyden gegebenen Zahlen ist auch das größte der kleinern Zahl und des ersten Restes: (XV. §.) Also ebenfalls

falls des zweyten und ersten; des dritten und zweyten u. s. f. bis endlich auch des lezten und vorlezten. Geht nun der lezte Rest in den Vorlezten auf; so ist er selbst das größte gemeinschaftliche Maas dieser beyden lezten Reste; folglich auch das größte der zwey vorgegebenen Zahlen.

§. XVIII.

Wenn der Rest, den zwo ungleiche Zahlen durch die Division der kleineren in die größere lassen, nicht das größte gemeinschaftliche Maas beyder Zahlen ist, so kann es auch nicht größer als dieser Rest seyn.

Denn aus dem Beweise von II. und III. des XVII. §. erhellet, daß das größte gemeinschaftliche Maas von den beyden Zahlen auch zugleich das größte von dem Reste ist: und also kann es nicht größer seyn.

§. XIX.

Hat man zwo ungleiche Zahlen, wo durch die Division der kleinern in die größere ein Rest bleibt, und ist die Differenz dieses Restes und der kleinern Zahl das größte gemeinschaftliche Maas der kleinern Zahl und des Restes; so ist eben diese Differenz auch das größte gemeinschaftliche Maas von der grössern Zahl, der kleinern Zahl und dem Reste.

Bew. Es heiße die Differenz des Restes und der kleinern Zahl, D, so ist D nach der Voraussetzung das größte gemeinschaftliche Maas des

Restes und der kleinern Zahl; also auch von jedem Vielfachen der kleinern Zahl. (§. XV.) Nun giebt nach den Divisionsregeln ein gewisses Vielfaches der kleinern Zahl und der Rest addirt, die große Zahl; folglich ist D das größte gemeinschaftliche Maas der größern Zahl, der kleinern Zahl und des Restes. (§. XV. XIV.)

Exempel. Es sey 12 und 32 die gegebenen Zahlen, so läßt 12 in 32 dividirt zum Rest 8; und 12 — 8 = 4; Aber das größte gemeinschaftliche Maas von 8 und 12 ist 4; (XII. §.) Also nicht nur von 8 und 12 allein, sondern auch von 32. Denn 4 ist sowohl das größte gemeinschaftliche Maas von 8 und 12, als auch von 2 . 12; folglich auch von 2 . 12 + 8 = 32.

XX.

Ist also die kleinere Zahl durch D ohne Rest theilbar, so ist es auch die größere Zahl. (§. XIX.)

XXI.

Wenn der Rest, der durch die Division einer kleinern Zahl in eine größere bleibt, nicht selbst das größte gemeinschaftliche Maas dieser beyden Zahl ist, so kann dasselbe auch nicht größer seyn, als die Differenz D der kleinern Zahl und des Restes.

Beweis. Durch A und B stelle man sich die beyden gegebenen ungleichen Zahlen vor, und zwar daß A die größere und B die kleinere sey. Nun müssen beyde Zahlen, A und B entweder Primzah-

len unter sich, oder theilbahre Zahlen unter sich, seyn. Im leztern Fall haben sie gewiß ein größtes gemeinschaftliches Maas, für welches wir n schreiben wollen. Dies kann nun entweder 2, oder 3, oder 4, u. s. w. seyn; Aber indem man A durch B dividirt, so erhält man zum Quotienten eine ganze Zahl, die Q heißen mag, die aber nach der Voraussetzung nicht der völlige Quotiente ist, sondern noch ein Rest, der R seyn soll, bleibt. Also ist A = Q. B + R. Mithin sind Q. B und R zwo Theile, welche zusammen ein Ganzes, nämlich A, ausmachen. Nimmt man davon den einen Theil, R, weg, d. i. zieht man R von A ab, so muß der andre Q. B übrig bleiben (11); folglich ist A — R = Q. B; Nun erhält man die Differenz D, wenn man R von B abzieht; also ist B — R = D und nach (12) ist B = R + D; mithin kann man B als ein Ganzes ansehen, daß aus den zwo Theilen R und D besteht. Wenn man aber den einen Theil D davon wegnimmt, so bleibt der andre R übrig: folglich ist R = B — D. Sezt man nun in den Ausdruck A — R, statt R, das ihm gleiche B — D, so ist es eben so viel, als wenn noch R da stünde; und mithin ist A — R = A — (B — D); Aber A — R war auch gleich Q. B; folglich muß auch A — (B — D) = Q. B seyn. Nun ist nach der Voraussetzung n ein Maas von B, also auch von Q. B (§. XV.) und nothwendig ebenfalls von A — (B — D). Da aber n auch ein Maas von A seyn soll, so muß n auch eines von B — D seyn (XV.); und weil n

eines

eines von B ist, so ist n auch ein Maas von D (§. XV.); folglich kann n nicht größer als D seyn: Oder das größte gemeinschaftliche Maas von den Zahlen A und B, wie sie vorausgesezt worden sind, ist nicht größer als die Differenz D der kleinern Zahl B und des Restes R.

XXII.

In so ferne die kleine Zahl von zwo ungleichen Zahlen, größer als die Hälfte der größern ist, so kann diese mit jener nicht ohne Rest dividirt werden; Aber es ist möglich, daß die Differenz der kleinern Zahl und der größern in leztere aufgienge. Wäre die kleinere Zahl nicht so groß wie die Hälfte der größern, so ist die Möglichkeit vorhanden, daß die kleinere die größere theilte.

XXIII.

Nun läßt sichs einsehen, wie man verfahren muß, um bey der 3ten Regel des XVII. §. ofte einige Divisionen erspahren zu können. Man darf nämlich nicht mit dem Reste R, in so ferne er größer als die Hälfte des lezten Divisors oder des nächst vor ihm hergehenden Restes, sondern mit der Differenz jenes Restes R, und des lezten Divisors, aufs neue dividiren. Ein Beyspiel wird die Sache deutlich machen.

Wäre z. E. die Zahlen 1578 und 2904 gegeben, deren größtes gemeines Maas man suchen sollte:

```
1578|2904|1
    |1578|
    ------
     1326
     ----
     252 Differ. D

252|1578|6
   |1512|
   ------
     66|252|3
       |198|
       -----
         54
        ---
         12 Diff.

12|66|5
  |60|
  ---
   6
```

so giebt die erste Division den Rest 1326, und man sieht leicht, daß derselbe größer ist, als die Hälfte von 1578. Man ziehe also 1326 von 1578 ab, so findet sich die Differenz 252, womit man in 1578 dividiren muß, da denn zum Reste 66 kommt, der kleiner als die Hälfte von 252 ist. Die neue Division durch 66 in 252, läßt zum Rest 54, der größer als die Hälfte von 66 ist; daher ziehe man 54 von 66 ab, so bleibt zur Differenz 12, welche in 66 dividirt, den Rest 6, läßt, der gerade die Hälfte von 12, und folglich das größte gemeine Maas ist.

Hätte man es nach der III. Regel des XVII. §. gesucht, so hätte man eben das gefunden; aber die Arbeit wäre weitläuftiger worden, wie man aus nachstehender Berechnung sehen kann.

	1578	2904	1
		1578	
1)	1326	1578	1
		1326	
2)	252	1326	5
		1260	
3)	66	252	3
		198	
4)	54	66	1
		54	
5)	12	54	4
		48	
6)	6	12	2
		12	
		0	

Bey jener Berechnung war die kleinere Zahl, der hier sich befindende zweyte, dritte und fünfte Rest die Divisores, und der sechste Rest 6, ist hier als das größte gemeine Maas von 1578 und 2904, wie dort, gefunden worden.

Auf ähnliche Art findet man das größte gemeinschaftl. Maas dreyer und mehrerer Zahlen. Hiervon ist sowohl, als auch überhaupt von der Lehre von Primzahlen in Herrn Hofrath Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik, I. Theil, und in von Clausbergs demonstrativischer Rechenkunst, 2. Theil. Auch Herrn Mag. Hindenburgs in der Erläut. zu §. 21. angeführtes Buch, nachzulesen.

XXIII.

XXIII. b)

Jeder Factor der eine Primzahl ist, heißt ein einfacher Factor, sonst ein zusammengesezter. Z. E. bey dem Product oder der Zahl 42 = 6 . 7 ist 7 ein einfacher und 6 ein zusammengesezter Factor.

XXIII. c)

Aus den einfachen Factoren einer Zahl ihre zusammengesezten zu finden.

Aufl. Das Product aus jedem Paare, jeden dreyen, jeden vieren u. s. w. der einfachen Factoren, giebt das Verlangte (§§. VIII, XXIII b).

Exempel. Der Zahl 210 einfache Factoren sind 0, 2, 3, 5, 7; Aus diesen finden sich dieser Zahl zusammengesezte, wenn man die 2 in die 3, 5, 7; die 3 in die 5, 7; die 5 in die 7 multiplicirt; hierauf die Producte 2 . 3 . 5; 2 . 5 . 7; 3 . 5 . 7; macht: Also sind

$$2 \cdot 3 = 6;\ 2 \cdot 5 = 10;\ 2 \cdot 7 = 14$$
$$3 \cdot 5 = 15;\ 3 \cdot 7 = 21;\ 5 \cdot 7 = 35$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30;\ 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70;\ 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

der Zahl 210 zusammengesezte Factoren.

XXIV.

Dividirt man zwo Zahlen durch ihr größtes gemeines Maas, so sind die Quotienten Primzahlen unter sich.

So geben die Zahlen 15 und 24 durch ihr größ-

tes gemeines Maas 3 dividirt die Quotienten 5 und 8, welche Primzahlen unter sich sind.

Beweis. Den Beweis allgemein zu führen, seyen A und B die beyden vorgegebenen Zahlen, und ihr größtes gemeines Maas sey = m. Dividirt man mit m sowohl in A als in B, so muß man zum Quotienten zwo ganze Zahlen erhalten, die Q und q seyn mögen, so daß

$$\frac{A}{m} = Q \text{ und } \frac{B}{m} = q$$

Mithin ist A = Q . m und B = q . m. Wären nun Q und q keine Primzahlen unter sich, so ist es gewiß, daß sie noch ein anderes gemeinschaftliches Maas n haben müssen. Man seze also

$$\frac{Q}{m} = K \text{ und } \frac{q}{n} = k$$

so ist Q = K . n und q = k . n; Sezt man in dem Ausdruck Q . m, statt Q das, was ihm gleich ist, nämlich K . n, so erhält man K . n . m = A; Auf eben diese Art ergiebt sich B = k . n . m; Dividiret man K . n . m durch n . m, so ists eben so viel als wenn A dadurch dividirt würde; Geschiehet aber die Division mit n . m bey k . n . m, so ist es eben das, als wenn sie damit bey B verrichtet worden wäre, und es wird daher

$$\frac{A}{n \cdot m} = K \text{ und } \frac{B}{n \cdot m} = k$$

Also

Also lassen sich A und B durch eine noch größere Zahl, als m ist, ohne Rest dividiren: und folglich hätten A und B noch ein größeres gemeines Maas, als m ist. Dies kann aber nicht seyn, weil man voraussezte, daß m schon das größte wäre; Und zwey größte gemeine Maase ein und eben derselben Zahlen A und B lassen sich nicht denken. Mithin sind Q und q Primzahlen unter sich.

XXV.

Einen Bruch auf einmal so aufzuheben, daß der Bruch, den man durch diese Aufhebung erhält, nicht weiter aufgehoben werden kann.

Aufl. Man dividire Zähler und Nenner mit ihrem größten gemeinschaftl. Maaße. (67, XXIV.)

Ex. Für den Bruch $\frac{3080}{8547}$ sucht man das größte gemeine Maas von 3080 und 8547 nach dem XVII. und XXIII. §; Dieses findet sich = 77, womit man den Zähler und Nenner, wie folget, dividirt:

$$\overset{77}{\frac{3080}{8547}\Big|\frac{40}{111}}$$

und der Bruch $\frac{40}{111} = \frac{3080}{8547}$ läßt sich nicht weiter aufheben.

§. 72.

Brüche unter eine Benennung bringen, heißt, Brüche von verschiedenen Nennern so verändern, daß sie alle gleiche Nenner bekommen, aber doch die Größe oder der Werth derselben nicht geändert werde. Die im Buche gegebene Auflösung dieser Aufgabe ist die allgemeine, und in der Buchstabenrechnung besonders brauchbar. In der Rechenkunst hat man noch andere Methoden, wodurch man auf kürzere Wege, Brüche auf einerley Benennung bringen kann. Diese werden nur in Rechenbüchern rc. abgehandelt, und gehören eben nicht in ein Compendium der Mathematik. Indessen kann man sich aus folgenden Büchern: **Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik,** I. **Theil,** VI. **Abschnitt; von Clausbergs demonstrativische Rechenkunst; Franz Christian Lorenz Karstens Rechenkunst; Einleitung zur Rechenkunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl. Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg.** 1738; u. a. m. Raths erholen.

Da man hier die Absicht hat, Erläuterungen zu schreiben, so wird es auch erlaubt seyn, in der Kürze eine andere Methode anzuzeigen, wodurch man ebenfalls Brüche auf einerley Benennung bringen kann.

I.

Die Brüche z. E. $\frac{11}{36}$ und $\frac{3}{8}$ unter einerley Benennung zu bringen, kann man die Zahl, worein

36 sowohl als auch 8 ohne Rest dividirt werden kann, als den gemeinen Nenner dieser Brüche annehmen.

Die Zahl 72, läßt sich sowohl durch 36 als auch durch 8 ohne Rest dividiren; und $72 : 36 = 2$; $72 : 8 = 9$ und $72 = 36 \times 2 = 8 \times 9$; Also $\frac{11 \cdot 2}{36 \cdot 2} = \frac{22}{72} = \frac{11}{36}$; $\frac{3 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{27}{72} = \frac{3}{8}$ (65) und so sind die beyden Brüche auf einerley Benennung gebracht. Aber nach der im Buche gegebenen Art, wäre der gemeine Nenner dieser Brüche $= 36 \cdot 8 = 288$ und $\frac{11}{36} = \frac{11 \cdot 8}{36 \cdot 8} = \frac{88}{288}$; $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 36}{36 \cdot 8} = \frac{108}{288}$; Man hat hier also eine größere Zahl zum gemeinen Nenner erhalten, als vorhin; es ist aber in der Ausübung allemal sehr bequem, wenn man Brüche durch so kleine Zahlen, als nur möglich, ausgedruckt erhalten kann. Deswegen ist es nöthig, daß man auch bey Bringung der Brüche auf einerley Benennung wisse, eine, für ihren gemeinen Nenner so kleine Zahl, als nur möglich, zu erhalten. Dies wollen wir nun zeigen.

II.

Die Zahl, worein man zwo oder mehrere Zahlen ohne Rest dividiren kann, heißt dererselben **gemeine theilbare Zahl**, (communis dividuus).

So ist 60 eine gemeine theilbare Zahl von 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30.

III.

Eine gemeine theilbare Zahl von zwo Zahlen zu finden.

Aufl. Man multiplicire beyde Zahlen in einander, das Product wird das Verlangte seyn. (16 und II.)

IV.

Das Product von drey, vier und mehrern Zahlen, ist eine gemeine theilbare Zahl von denselben. (16; II; III.)

So ist z. E. das Product

$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 10 \times 12 \times 15 \times 20 \times 30$

eine gemeine theilbare Zahl von 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30. Aber 60 ist auch eine davon, und kleiner als dieses Product. Es können also Zahlen, verschiedene gemeine theilbare Zahlen und kleinere, haben, als ihr Product ist.

V.

Die kleinste gemeine theilbare Zahl (minimus communis dividuus) von zwo oder mehrern Zahlen, ist die kleinste Zahl, worein man dieselben ohne Rest dividiren kann. Z. B. 60 ist die kleinste gemeine theilbare Zahl von 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30.

VI.

Es sind zwo Zahlen gegeben; man soll ihre kleinste gemeine theilbare Zahl suchen.

Aufl. Man suche der beyden gegebenen Zahlen ihren größten gemeinen Theiler, und dividire ihn in das Product dieser zwo Zahlen. Der Quotiente wird ihre kleinste gemeine theilbare Zahl seyn. Oder, welches eben das ist, man dividire die eine Zahl durch ihrem gefundenen größten gemeinen Theiler, und den Quotienten multiplicire man mit der andern Zahl, so wird das nun erhaltene Product, die kleinste gemeine theilbare Zahl seyn.

Ex. Ist von 15 und 36 die kleinste gemeine theilbare Zahl zu finden, so ist 3 der größte gemeine Theiler von 15 und 36, und

$$15 \times 36 = 540$$

Aber $540 : 3 = 180 =$ der kleinsten gemeinen theilbaren Zahl von 15 und 36, oder

$$15 : 3 = 5 \text{ und } 5 \times 36 = 180.$$

Beweis. Der Deutlichkeit wegen, wollen wir die im Exempel vorgegebenen Zahlen 15 und 36 deren größtes gemeine Maas 3, ist, beybehalten. Nun ist $\frac{15}{3} = 5$ und $\frac{36}{3} = 12$. Also $15 = 3 \cdot 5$ und $36 = 3 \cdot 12$ folglich $15 \cdot 36 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 12$; dividirt man aber mit 3 in $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 12$; so ist es eben so viel als ob man dies in $15 \cdot 36$ thäte,

thäte, daß also $\frac{15 \cdot 36}{3} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 12}{3} = 5 \cdot 3 \cdot 12 = 180$; da aber $15 = 3 \cdot 5$ und $36 = 3 \cdot 12$ ist; so kann man 15 sowohl als auch 36 in $5 \cdot 3 \cdot 12 = 15 \cdot 12 = 36 \cdot 5 = 180$ ohne Rest dividiren; folglich ist $5 \cdot 3 \cdot 12 = 180$ eine gemeine theilbare Zahl von 36 und 15; aber auch die kleinste, weil 5 und 12 Primzahlen unter sich sind, (XXIV. Erl. des 70. §.) und daher statt 5 oder 12 keine kleinere Zahlen gesezt werden können, daß sich alsdenn auch noch das von $5 \cdot 3 \cdot 12$ verschiedene und kleinere Product durch 15 und 36 ohne Rest dividiren ließe. Die Schlüsse sind an die bestimmte Größe der Zahlen nicht gebunden: daher ist der Beweis allgemein. Sind die beyden vorgegebenen Zahlen, Primzahlen unter sich, so ist ihr Product selbst die kleinste gemeine theilbare Zahl. (VI.)

VII.

Die kleinste gemeine theilbare Zahl von mehr als zwo Zahlen zu finden.

Auflös. Man suche erstlich von zwoen der gegebenen Zahlen, die kleinste gemeine theilbare Zahl; (VI.) Hernach von dieser und der dritten der gegebenen Zahlen, und fahre durch alle gegebene so fort, da dann die lezt gefundene die kleinste gemeine theilbare Zahl ist.

Ex. Es seyen die gegebenen Zahlen 4, 5, 6, 9, 10, 16, von welchen die kleinste gemeine theilbare

Zahl zu finden ist. Man suche sie von 4 und 5, welche 20 seyn wird; ferner suche man die kleinste gemeine theilbare Zahl von 20 und 6; dann von 60 und 9, welche 180 ist; weiter von 180 und 10, so ebenfalls 180 wieder ist, und endlich von 180 und 16, so 720, und die kleinste gemeine theilbare Zahl aller der gegebenen 4, 5, 6, 9, 10, 16, seyn wird.

Beweis. Denn wenn eine Zahl (6 z. E.) eine andre (z. E. 12) ohne Rest theilt, so theilt eben diese Zahl (6 nämlich) auch alle diejenigen, welche von jener (12 nämlich) ohne Rest getheilt werden. So wird 24, 36 ꝛc. durch 12 ohne Rest dividirt und also auch durch 6: Denn $36 : 12 = 3$ und mithin $36 = 3 \cdot 12$; aber $12 : 6 = 2$; Also $12 = 6 \cdot 2$; folglich $36 = 3 \cdot 2 \cdot 6$: Also kann $36 = 3 \cdot 12 = 3 \cdot 2 \cdot 6$ sowohl durch 12 als auch durch 6 ohne Rest dividirt werden. Nun seyen die Zahlen 20, 30, 8 ꝛc. gegeben, deren kleinste gemeine theilbare Zahl man suchen soll; so ist $3 \cdot 20$ zwischen 20 und 30 und $3 \cdot 20 \cdot 2$ zwischen $3 \cdot 20$ und 8 die kleinste gemeine theilbare Zahl. (VI.) Aber $3 \cdot 20$ kann durch 20 und 30 ohne Rest dividirt werden; folglich auch $3 \cdot 20 \cdot 2$; und mithin ist $3 \cdot 20 \cdot 2 = 120$ die kleinste gemeine theilbare Zahl von 20, 30, 8. (VI.)

Man kann aber, wie sich leicht aus dem, was izt gesagt worden ist, ergiebt, die Rechnung um vieles abkürzen, wenn man so verfährt: Man nehme von den vorgegebenen Zahlen zwo nach Belieben,

ben, und suche davon die kleinste gemeine theilbare Zahl (VI), welche in die Stelle dieser zwo Zahlen gesezt werden kann, so daß die Anzahl der gegebenen Zahlen um eine kleiner wird. Ferner nehme man wieder nach Belieben zwo Zahlen, und suche davon die kleinste gemeine theilbare Zahl, und seze dieselbe an die Stelle eben derselben zwo Zahlen, so, daß die Anzahl der Zahlen wieder um eine vermindert wird. Auf diese Art fahre man fort, bis man alle gegebene Zahlen auf zwey gebracht hat, und suche endlich deren kleinste gemeine theilbare Zahl, welche auch die kleinste aller gegebenen ist.

Ex. Dazu wollen wir uns wieder der vorhin gegebenen Zahlen 4, 5, 6, 9, 10, 16, bedienen. Man sieht leicht, daß sich die Zahlen 4 und 16 gut zusammenschicken, und daß 16 selbst ihre kleinste gemeine theilbare Zahl ist. Daher setze man statt dieser beyden Zahlen, in die Reihe 4, 5, 6, 9, 10, 16 nur die 16, oder, welches einerley ist, man lasse aus gedachter Reihe die 4 weg; so hat man nur noch von 5, 6, 9, 10, 16 die kleinste gemeine theilbare Zahl zu suchen. Man nehme daher ferner die Zahlen 5 und 10, deren kleinste gemeine theilbare Zahl selbst 10 ist, und verfahre wie vorhin; so hat man nur noch 6, 9, 10, 16; Hiervon nun, nehme man 6 und 9, deren kleinste gemeine theilbare Zahl 18 ist, und setze in 6, 9, 10, 16, statt 6 und 9 die 18, so behält man nur noch 10, 16, 18. Von diesen nehme man 10

und 16, finde ihre kleinste gemeine theilbare Zahl = 80, und nun hat man nur noch 80 und 18, deren kleinste gemeine theilbare Zahl = 720 (eben die, die nach der ersten Art gefunden) und die kleinste gemeine theilbare Zahl aller gegebenen 4, 5, 6, 10, 9, 16 ist.

Die ganze Arbeit kann am bequemsten so vorgestellt werden:

~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~9~~, ~~10~~, ~~16~~

~~18~~   ~~80~~

720

Man streicht nämlich gleich die Zahlen aus, durch welche sich andre von den gegebenen theilen lassen, wie hier die 4 und 5; hernach sezt man für 6 und 9 die 18 und für 10 und 16 die 80; Endlich findet sich aus 18 und 80 die 720, welches, wie gedacht, die kleinste gemeine theilbare Zahl, der vorgegebenen Zahlen, ist.

VIII.

Brüche, die ungleiche Nenner haben unter eine Benennung zu bringen.

Auflösung. Man suche die kleinste gemeine theilbare Zahl aller Nenner der gegebenen Brüche, und für den gemeinen Nenner der Brüche, in welche die gegebenen verwandelt werden sollen, nehme man diese kleinste gemeine theilbare Zahl. Alsdenn aber dividire man hierein jeden Nenner der vorgegebenen Brüche, und multiplicire mit

dem Quotienten die dahin gehörigen Zähler, so geben die Producte die Zähler der gesuchten Brüche, die alle zum Nenner gedachte kleinste gemeine theilbare Zahl haben.

Exempel. Die Brüche $\frac{5}{12}, \frac{8}{15}, \frac{7}{20}, \frac{4}{21}$ unter einerley Benennung zu bringen, suche man (nach VII.) die kleinste gemeine theilbare Zahl von den vorgegebener Brüchennennern

12, 15, 20, 21
60
420

Diese ist also 420 und wird für den gemeinen Nenner der gesuchten Brüche angenommen. Selbige aber kann man so finden:

420

$\frac{5}{12}$	35	175
$\frac{8}{15}$	28	224
$\frac{7}{20}$	21	147
$\frac{4}{21}$	20	80

Nämlich man schreibt die Brüche unter einander, zieht zur Rechten herunterwärts zweene etwas von einander abstehende Striche, und sezt darüber den

 gemei-

gemeinen Nenner 420; Nun dividirt man mit dem Nenner 12 in 420 und sezt den Quotienten 35 neben den Bruch $\frac{5}{12}$ zwischen den zweenen Strichen; den Zähler 5 aber, multiplicirt man mit dem Quotienten 35; so erhält man das Product 175, das neben der 35 weiter zur Rechten gesezt wird, und welches der Zähler eines der gesuchten Brüche ist, wozu der Nenner 420 gehört, so daß $\frac{175}{420} = \frac{5}{12}$. Auf diese Art verfährt man nun mit den übrigen Brüchen $\frac{8}{15}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{4}{21}$; da man die Zahlen 224, 147, 80 zu Zählern erhält, wozu der Nenner 420 gehört, so, daß $\frac{224}{420} = \frac{8}{15}$; $\frac{147}{420} = \frac{7}{20}$; $\frac{80}{420} = \frac{4}{21}$ ist, und die vorgegebenen Brüche in andere gleichen Inhalts verwandelt worden sind, die alle zum Nenner 420 haben.

Bew. Denn da $420 : 12 = 35$; $420 : 15 = 28$; $420 : 20 = 21$; $420 : 21 = 20$; so ist $420 = 12 \cdot 35 = 15 \cdot 28 = 20 \cdot 21 = 21 \cdot 20$; (16) Also (65) $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 35}{12 \cdot 35} = \frac{175}{420}$; $\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 28}{15 \cdot 28} = \frac{224}{420}$; $\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 21}{20 \cdot 21} = \frac{147}{420}$; und $\frac{4}{21} = \frac{4 \cdot 20}{21 \cdot 20} = \frac{80}{420}$. Diese Schlüsse gelten nicht nur allein von den zum Beyspiel angenommenen

menen Zahlen, sondern, wie leicht einzusehen ist, von allen; daher ist der Beweis allgemein.

§. 73.

Die Summe zwoer oder mehrere Brüche von einerley Nennern ist ein Bruch, dessen Nenner eben derselbe, der Zähler aber die Summe jener Zähler ist; Und die Differenz zwoer Brüche die gleiche Nenner haben, ist ebenfalls ein Bruch der zum Nenner eben denselben, zum Zähler aber, die Differenz jener Zähler, hat. Dieser Satz ist für sich klar, so bald man bedenket, daß Brüche von gleichen Nennern, einerley Theile des Ganzen anzeigen, und, wenn man nach (53) einen solchen Theil als die Einheit annimmt, die Brüche ganze Zahlen, so groß wie ihre Zähler werden. Soll man nun z. E. $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{9}$ zusammen addiren, so ist es eben so viel, als wenn man ganze Zahlen, so groß wie die Zähler 5, 4, 2, und deren Einheit $= \frac{1}{9}$ eines Ganzen ist, zusammen addiren sollte: demnach ist die Summe $5 + 4 + 2 = 11$ eine ganze Zahl, dessen Einheit $= \frac{1}{9}$ eines Ganzen ist; folglich $= 11 \cdot \frac{1}{9} = \frac{11}{9} = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9}$.

Wären aber $\frac{5}{11}$ von $\frac{8}{11}$ abzuziehen, so erhält man aus izt angefühürten Ursachen, zur Differenz $8 - 5 = 3$ eine Zahl, dessen Einheit $= \frac{1}{11}$ eines Ganzen ist; folglich $\frac{3}{11} = \frac{8}{11} - \frac{5}{11}$.

§. 74.

Wenn man einen eigentlichen Bruch zu einer ganzen Zahl addiren soll; so addirt man ihn meist

so dazu, daß man ihn unmittelbar an die ganze Zahl anhängt. Z. B. $5 + \frac{3}{4} = 5\frac{3}{4}$; und $3 + 5\frac{2}{3} = 3 + 5 + \frac{2}{3} = 8\frac{2}{3}$.

Fernere Exempel: zu addiren.

I.

210

$\frac{2}{3}$	70	140
$\frac{4}{5}$	42	168
$\frac{6}{7}$	30	180
$\frac{1}{2}$	105	105

Summe $\frac{593}{210} = 2\frac{173}{210}$ (60)

II.

20

$15\frac{1}{2}$	10	10
$12\frac{3}{4}$	5	15
$10\frac{2}{5}$	4	8
$8\frac{7}{10}$	2	14

Summe $45\frac{47}{20} = 47\frac{7}{20}$;

zu subtrahiren.

I.

15

$\frac{3}{5}$	3	9
$\frac{1}{3}$	5	5

Diff. $\frac{4}{15}$

II.

$$\overset{36}{\smile}$$

$$\begin{array}{r|c|l} 3\frac{7}{12} & 3 & 21 \\ 1\frac{4}{9} & 4 & 16 \\ \hline \end{array}$$

Diff. $2\frac{5}{36}$

III.

$$\overset{210}{\smile}$$

$$\begin{array}{r|c|l} 49\frac{8}{105} & 2 & 16 \\ 23\frac{13}{30} & 7 & 91 \\ \hline \end{array}$$

$$\overset{5}{\smile}\ \overset{3}{\smile}$$

Diff. $25\,\frac{153}{210}\,\Big|\,\frac{27}{42}\,\Big|\,\frac{9}{14}$ (72) $\frac{135}{210}$

Also: $25\frac{9}{14} = 49\frac{8}{105} - 23\frac{13}{30} = 49\frac{16}{210} - 23\frac{91}{210} = 49 + \frac{16}{210} - 23 + \frac{91}{210} = 49 - 23 + \frac{16}{210} - \frac{91}{210} = 48 - 23 + \frac{210}{210} + \frac{16}{210} - \frac{91}{210} = 48 - 23 + \frac{226}{210} - \frac{91}{210} = 48 - 23 + \frac{135}{210} = 25 + \frac{135}{210} = 25\frac{135}{210} = 25\frac{9}{14}$.

Ferner

Ferner

$$732 - 3\frac{4}{5} = 731 + \frac{5}{5} - 3 + \frac{4}{5} = 731$$

$$- 3 + \frac{5}{5} - \frac{4}{5} = 728 + \frac{1}{5} = 728\frac{1}{5}.$$

§. 75.

Eben so erhellet, daß .... gilt. Hieraus folgt nun von selbst, daß auch z. E.

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 5}{9 \cdot 11 \cdot 8} = \frac{70}{792}, \text{ und}$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3}{5 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 10} =$$

$$\frac{1155}{46800} = \frac{231}{9360} = \frac{77}{3120} \; (72).$$

Den Zähler und Nenner des Products zweener oder mehrere Brüche in die kleinst möglichen Zahlen ausgedruckt, nämlich so, daß sich das Product nicht weiter aufheben läßt, zu bekommen, dient folgendes: Man sieht nämlich, ob ein Zähler eines Bruchs der gegebenen mit einem Nenner eines andern von denselben einen größten gemeinen Theiler hat. Findet man dieses, so dividirt man damit besagten Zähler und Nenner, streicht sie aus, und sezt an deren Stelle die Quotienten. Hierauf sieht man ferner, ob mehrere Zähler und Nenner von solcher Beschaffenheit vorhanden sind; Trift man nun dergleichen an, so ver-

verfährt man mit ihnen eben so, wie izt gelehret worden. Ist dieses geschehen, so verrichtet man die Multiplication wie im Buche ist gezeigt worden, nur daß man statt der ausgestrichenen Zähler und Nenner, die, an deren Stelle gesezte, Zahlen braucht.

Exempel

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$$

Hier ist der Zähler 3 und der Nenner 6 so beschaffen, daß 3 ihr größtes gemeines Maas ist. Man dividirt diese damit, streicht sie aus und sezt an ihre Stelle die Quotienten wie nachstehend:

$$\frac{\overset{1}{\not{3}}}{4} \cdot \frac{5}{\underset{2}{\not{6}}} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8}$$

Denn $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{3 \cdot 5 : 3}{4 \cdot 6 : 3} = \frac{5}{8}$

Ferneres Exempel

$$\frac{\overset{1}{\not{8}}}{\underset{3}{\not{9}}} \cdot \frac{\overset{1}{\not{3}}}{\underset{4}{\not{20}}} = \frac{1}{12}$$

Und

$$\frac{\overset{3}{\cancel{33}}}{\underset{5}{\cancel{35}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{\underset{1}{5}}{\cancel{55}}}\cdot\frac{\overset{\overset{1}{5}}{\cancel{15}}}{\underset{7}{\cancel{77}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{22}}}{\underset{35}{\cancel{105}}}$$

$$=\frac{3\cdot2\cdot1\cdot2}{5\cdot1\cdot7\cdot35}=\frac{12}{1225};$$ Denn $$\frac{33}{35}\cdot\frac{14}{55}\cdot\frac{15}{77}\cdot\frac{22}{105}=\frac{33\cdot14}{35\cdot55}\cdot\frac{15\cdot22}{77\cdot105}=\frac{33\cdot14:7}{35\cdot55:7}\cdot\frac{15\cdot22:11}{77\cdot105:11}=\frac{33\cdot2}{5\cdot55}\cdot\frac{15\cdot2}{7\cdot105}=\frac{33\cdot2:11}{5\cdot55:11}\cdot\frac{15\cdot2:3}{7\cdot105:3}=\frac{3\cdot2}{5\cdot5}\cdot\frac{5\cdot2}{7\cdot35}=\frac{3\cdot2\cdot5\cdot2}{5\cdot5\cdot7\cdot35}=\frac{3\cdot2\cdot5\cdot2:5}{5\cdot5\cdot7\cdot35:5}=\frac{3\cdot2\cdot2}{5\cdot7\cdot35}=\frac{12}{1225}.$$

§. 78.

Da die Division zweyer Brüche in eine Multiplication verwandelt werden kann, so können hier ebenfalls die in des 75. §. Erl. gelehrten Vortheile, um auch den Zähler und Nenner des Quotienten zweyer Brüche in den kleinsten möglichen Zahlen ausgedruckt zu erhalten, angewandt werden. Vide p. 372.

§. 81.

Weiter unten (§. VI. Ref.) wird in den Erl. hiervon mehreres vorkommen.

§. 83.

§. 83

Sein erster Theil . . . . . . von (75). Nämlich jeder Factor steckt im Producte so vielmal, als wie die Einheit in dem andern: Oder, welches einerley ist, das Product enthält den einen Factor so vielmal, als wie der andre die Einheit. Nun enthält z. E. das Product $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}$ den 6ten Theil von $\frac{3}{4}$ fünfmal, d. i. $\frac{5}{6}$ von $\frac{3}{4}$ (75); so wie $\frac{5}{6}$ den sechsten Theil von der Einheit fünfmal, oder $\frac{5}{6}$ von der 1 enthält. (§. 58. und dessen Erl.)

§. 85. Seite 59.

Der Bruch . . . . ist. Nach (78) ist dieser Quotiente (nämlich $\frac{3}{4} : \frac{32}{5} =$) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{32} = \frac{15}{128}$; Eben so findet sich $\frac{\frac{2}{3}}{2\frac{3}{4}}$ des Ducaten $= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{4}} = \frac{2}{3} : \frac{11}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{11} = \frac{8}{33}$ des Ducaten; und $\frac{17\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}}$ des Julianischen Jahrs $= 17\frac{1}{2} : 365\frac{1}{4} = \frac{35}{2} : \frac{1461}{4} = \frac{35}{2} \cdot \frac{4}{1461} = \frac{140}{2922}$ des Julianischen Jahrs.

. . . . . Mit ihm also multipliciren rc. Nämlich mit dem Bruch $\frac{1}{\frac{5}{7}}$ multipliciren.

Für 66.

$$\frac{2}{3:\frac{5}{7}}=\frac{2}{3\cdot\frac{7}{5}}=\frac{2}{\frac{3\cdot7}{5}}=\frac{2}{3\cdot7:5}=\frac{2}{3\cdot7}\cdot5\ (66)$$

$$=\frac{2\cdot5}{3\cdot7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}.$$

§. 87.

Zwo Größen die einer dritten gleich sind, sind unter sich gleich. Z. E.

2 Loth = 1 Unze

1 Unze = 8 Drachma

Also 2 Loth = 8 Drachma.

Was größer oder kleiner 2c.

Z. E.

1 Thaler = 24 Gr.

Nun ist 32 Gr. > 24 Gr.; Also auch größer als 1 Thlr.

§. 88.

Gleiches zu Gleichen .... giebt Gleiches.

Exempel

$$9 = 6 + 3$$
$$\text{add. } 5 + 2 = 7$$

Also $9 + 5 + 2 = 6 + 3 + 7 = 16$.

$$8 = 5 + 3$$
$$\text{subtr. } 3 = 3$$

Also $8 - 3 = 5 + 3 - 3 = 5$

6 =

$$6 = 4 + 2$$
$$\text{mult. mit } 7 = 7$$
$$\text{giebt } 6 \cdot 7 = (4 + 2) \cdot 7 = 42.$$

$$12 = 8 + 4$$
$$\text{divid. } 6 = 6.$$
$$\text{folgl. } 12 : 6 = (8 + 4) : 6 = 2$$

Gleiches zu ungleichen . . . . kleiner.

Exempel

$20 > 15$	$20 > 15$
add. $4 = 4$	subtr. $4 = 4$
Also $24 > 19$	$16 > 11$
$20 > 15$	$20 > 15$
mult. $3 = 3$	div. $5 = 5$
$60 > 45$	$4 > 3$

Das Größere . . . . als das Kleinere

Exempel

$10 = 8 + 2$	$10 = 8 + 2$
add. $5 > 3$	mult. $5 > 3$
$10 + 5 > 8 + 2 + 3$	$10 \cdot 5 > (8 + 2) \cdot 3$

aber abgezogen, oder . . . . weniger.

Exempel.

$13 = 6 + 7$	$10 = 8 + 2$
subtr. $4 > 3$	div. $5 > 2$
$13 - 4 \ngtr 6 + 7 - 3$	$10 : 4 \ngtr (8 + 2) : 2$

§. 89.

So sind z. E. eine Menge von Pfunden- und eine von Lothen Größen von einerley Art: denn ein Pfund enthält eine bestimmte Menge von Lothen; also ist eine Menge Pfunde = einer gewissen Menge Lothe. Nun ist gewiß eine kleinere Menge derselben ein Theil einer größern von ihnen: Mithin kann eine Menge Lothe ein Theil einer Menge von Pfunden seyn. Enthält nun gleich diese Menge jene nicht ein- oder etlichemal genau in sich, so lassen sich doch beyde Mengen mit einem gemeinschaftlichen Stücke, mit dem Lothe, als einer Einheit, ausmessen: Folglich kann man sie als Zahlen ansehen: (2; 4) So ists begreiflich, wie alle Grössen auf Zahlen gebracht werden können.

Wenn man nun die bisherigen Lehren, auf die im gemeinen Leben, Handel rc. vorkommenden Größen anwendet, so beschäftiget man sich mit der **Rechnung in genannten Zahlen.** Diese pflegt man gemeiniglich nach der Lehre von Brüchen vorzutragen. Es wird mir also, da ich für Anfänger schreibe, erlaubt seyn, hier kürzlich davon zu handeln.

Die vier Rechnungsarten
in genannten Zahlen.

§. 1.

Im gemeinen Leben und Handel, in Künsten und Wissenschaften, theilt man die größern Einheiten

heiten des Maases, Gewichts, Werths oder anderer Größen, in kleinere ein, legt ihnen besondre Namen bey, und verbindet öfters in dem Ausdrucke einer Größe mehrere solche Namen mit einander. Diese Eintheilungen und Namen sind ganz willkührlich und beruhen blos auf der ihr Gutdünken, die sie in einem jeglichen Lande zuerst eingeführt haben: daher ist diese große Verschiedenheit entstanden, die sich hiebey befindet.

Man muß also diese verschiedenen Namen und Eintheilungen, wie viel nämlich kleinere Einheiten auf jede nächst größere gehen, wissen. Die Kürze aber verstattet nicht sich hierbey aufzuhalten, zumal da hierüber aus Büchern, die davon ganz oder zum Theil handeln, Raths erholet werden kann. Dahin gehört **v. Clausbergs demonstrativischer Rechenkunst**, besonders die 4te Auflage von 1772. **Einleitung in die Rechenkunst zum Gebrauch des Gymnasii** rc. der 2te Theil. **Krusens Contorist. Franz Rothens allgemeiner Wiener Contorist**, u. a. m.

§. 11.

Die **größern Einheiten** des Maases, Gewichts rc. nennt man auch in Ansehung der ihnen zukommenden kleinern, **Einheiten von höherer oder größerer Benennung**, so wie leztere in Absicht auf die erstern, **Einheiten von geringerer oder niedriger Benennung.**

So ist z. E. der Thaler in Absicht aufn Groschen eine Einheit von höherer Benennung und der Groschen in Betracht des Thalers eine von geringere. Nun mißt man zwar, wie gedacht, einerley Größe nicht allezeit durch eine und eben dieselbe Einheit, z. E. blos durch Centner, Thaler, rc. sondern ofte durch verschiedene sich auf einander beziehende Einheiten, als durch Thaler, Groschen, Pfennige, aus. Es wird aber doch in der Rechnung oft nöthig, die verschiedenen sich auf einander beziehenden Einheiten, wonach eine und eben dieselbe Größe beschrieben ist, so zu verwandeln, daß, sie entweder nur blos einerley Benennung führen, oder auch zugleich die größern Einheiten auf kleinere gebracht werden; obgleich in den meisten Fällen, eine Menge kleinere Einheiten, die eine größere Einheit ein- oder etlichemal enthält, durch diese größere Einheit mit ausgedruckt wird; so wie man z. E. 127 Gr. lieber durch 5 Thlr. 7 Gr. ausdrückt als allein blos durch diese Menge Groschen: Eben so gerne aber sucht man auch die Brüche, die sich bey Mengen von den Einheiten, die nicht die kleinsten sind, befinden, wegzuschaffen, und daher z. E. 5 $\frac{7}{8}$ Thlr. lieber durch 5 Thlr. 21 Gr. und 3 $\frac{2}{3}$ Thlr. 4 $\frac{1}{4}$ Gr. durch 3 Thlr. 20 Gr. 3 Pfen. auszudrücken. Es ist also nöthig zu zeigen, 1) wie entweder Einheiten von höherer Benennung in Einheiten von geringerer zu verwandeln, oder, wie die auf einander sich beziehenden Einheiten, wonach eine Größe beschrieben ist, nur blos auf einerley Benennung zu bringen,

sind;

sind; und dies heißt die Resolution: 2) aber, wie eine durch einerley oder auch durch verschiedene, bey sich Brüche habende, Einheiten ausgedrückte Größe, nach verschiedenen sich aufeinander beziehenden Einheiten, auf gewöhnliche Art, nämlich so zu beschreiben ist, daß von keiner Einheit so viele oder mehrere vorkommen, als eine nächst größere beträgt, und auch nirgends Brüche, ausgenommen bey der kleinsten Einheit, wenn solche nicht gänzlich zu vermeiden sind, entspringen; und dies nennt man die Reduction.

Die Resolution.

§. III.

Eine Menge von höherer Benennung auf eine von geringerer zu bringen.

Aufl. Man sehe wie viel kleinere Einheiten eine von den gegebenen größern enthält, und mit dieser Anzahl multiplicirt man die vorgegebene Menge dieser größern Einheiten; das Product giebt das Verlangte.

Exempel.

Wie viel betragen 50289 Thaler an Groschen. Weil 1 Thlr. = 24 Gr. so muß man 50289 mit 24 multipliciren, so wird das Product 50289 × 24 = 1206936 Gr. geben.

§. IV.

Die Auflösung vorigen §. ist auch da zu gebrauchen, wo eine Einheit von höherer Benennung, nicht eine ganze Anzahl Einheiten von niedriger Benennung in sich begreift, so wie ebenfalls auch da, wo die Menge der größern Einheiten die in eine von kleinern verwandelt werden soll, ein Bruch ist.

Exempel.

Wenn ein Lachter $= 3\frac{1}{2}$ Leipziger Elle $= \frac{7}{2}$ Leipziger Elle, ist, so fragt sichs: Wie viel 132 Lachter an Leipziger Ellen betragen?

Antwort: $132 \times \frac{7}{2} = \frac{924}{2} = 462$ Leipziger Ellen.

Man will wissen, wie viel Tage nach dem alten Julianischen Calender in 36 Jahren verfließen? Da man auf ein Jahr im Julianischen Calender $365\frac{1}{4}$ Tag rechnet, so ist die Rechnung folgende:

$36 \times (365 + \frac{1}{4}) = 36 \times 365 + 36 \times \frac{1}{4} = 13140 + 9 = 13149$ Th. Tage.

Wie viel Pfunde beträgt $6\frac{5}{7}$ Cent., den Cent. zu 110 Pf. gerechnet? So viel als

$(6 + \frac{5}{7}) . 110 = 6 . 110 + \frac{5}{7} . 110 = 660 + 78 + \frac{4}{7} = 738\frac{4}{7}$ Pf.

§. V.

Eine Größe, die durch verschiedene auf einander sich beziehende Einheiten beschrieben

ben ist, durch Einheiten von geringster Benennung auszudrücken.

Aufl. Man bringe die größern Einheiten, auf die nächst kleinere (§. III.) und thue dazu die Einheiten so von diesen nächst kleinern vorhanden sind. Diese Summe verwandle man auf gleiche Art in die nun gleich folgende kleinere Einheit, und thue dazu ebenfalls die vorhandenen Einheiten, die mit dieser letztern gleichen Namen führen. Diese Arbeit wiederhole man so ofte bis man auf das Verlangte gekommen ist.

Exempel.

Man verlangt zu wissen, wie viel 5 Cent. 18 Pf. 20 Loth und 2 Quent. in Quentgen austrage? Wenn 1 Cent. = 110 Pf.; 1 Pf. = 32 Loth; 1 Loth = 4 Qu.; so ist die Rechnung folgende:

5 Centner
mult. mit 110 giebt
550 Pf.
dazu add. 18 Pf.
giebt 568 Pf.; dieses multiplicirt mit
32
1136
1704
giebt 18176 Loth; dazu addirt

 20 Loth

20 Loth giebt

18196; Endlich mult. mit
4 giebt

72784 Qu.; und dazu addirt
2; kommt

72786 Qu.; Also ist 5 Cent., 18 Pf., 20 Loth, 2 Qu., so viel als 72786 Qu.

Wer im Rechnen nur etwas geübt ist, wird gewiß das, was man dazu addiren soll, in Gedanken dazu addiren; es müßten denn beträchtlich grosse Zahlen vorgegeben seyn. Auf diese Art wird die Rechnung abgekürzt und sich in folgende Form darstellen lassen.

110 ‿ 32 ‿ 4 ‿

5 Cent. 18 Pf. 20 Loth, 2 Qu.
110

568 Pf.
32

1136
1706

18196 Loth
4

72786 Qu.

Die über Centner, Pfund, Loth, geschriebenen Zahlen, zeigen an, wie viel eine jegliche größere

Einheit, nächst kleinere in sich enthalte; so zeigt 110 an, daß 1 Centn. = 110 Pf. ist. Weil nun so die Operation besser in die Augen fällt, so wollen wir dies künftighin beybehalten.

Man hat nach dem Apothekergewicht, 24 Pf. 9 Unzen, 5 Drachmen, 1 Scrupel, 12 Gran, und frägt: wie viel ists in Granen?

Zur Abkürzung des Schreibens dienen folgende Zeichen:

℥ bedeutet Unze
ʒ — — Drachma
℈ — — Scrupel
Gr. — — Gran.

Und also siehts Exempel und Rechnung so aus:

```
 12    8    3    20
24 Pf. 9 ℥, 5 ʒ, 1 ℈, 12 Gr.
  12
  48
 24
 297 ℥
   8
 2381 ʒ
    3
 7144 ℈
   20
 142892 Gr.
```

Man

Man verlangt zu wissen, wie viel die Zeit von 4 Wochen, 5 Tage, 14 Stunden und 36 Minuten, in Minuten ausmache?

Da eine Woche = 7 Tage; 1 Tag = 24 Stunden; 1 Stunde = 60 Minuten; so wird die Rechnung folgende seyn:

```
    7   24   60
   ⌣    ⌣    ⌣
4 W. 5 T. 14 St. 36 Min.
7
─────────
33 Tage
24
─────────
146
66
─────────
806 Stunden
 60
─────────
48396 Min.
```

Wenn bey diesem Geschäfte Brüche mit vorkommen, so muß die Lehre von Brüchen bekannt seyn und zu Hülfe genommen werden. Folgendes mag zum fernern Beyspiel dienen.

Einer hat nach dem in Deutschland gewöhnlichen Cöllnischen Silbergewicht 13 $\frac{1}{2}$ Mrk. 10 $\frac{3}{4}$ Uz. 3 $\frac{1}{3}$ Loth, 4 $\frac{3}{5}$ Qu. 5 $\frac{2}{3}$ Englisch und 20 Aß an Silber; verlangt zu wissen: wie viel dieses Gewicht an Aße austrage?

Die Silbermark wird in 8 ℥ eingetheilt; 1 ℥ = 2 Loth; 1 Loth = 4 Qu. Ein Englisch aber ist ein solches Gewicht, davon 19 eine Unze ausmachen, und folglich ist 1 Qu. = 2 $\frac{3}{8}$ Englisch;

1 Eng-

1 Englisch = 32 Aß. Die Rechnung ist nun folgende:

$$\overset{8}{\smile}\quad\overset{2}{\smile}\quad\overset{4}{\smile}\quad\overset{2\frac{3}{8}}{\smile}\quad\overset{32}{\smile}$$

$13\frac{1}{2}$ Mrk. $10\frac{3}{4}$ ℥, $3\frac{1}{3}$ Lt. $4\frac{3}{5}$ Qu. $5\frac{2}{3}$ Engl. 20 Aß.

8 mult.

104 und $\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$
4 add.
$10\frac{3}{4}$ add.

$118\frac{3}{4}$ ℥
2

236 und $2 \cdot \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}\,\big|\,\frac{3}{6}$
$3\frac{2}{6}\,\big|\,\frac{2}{6}$ add.

$240\frac{5}{6}$ Loth
4

960, und $4 \cdot \frac{5}{6} = 3\frac{1}{3}$
$3\frac{1}{3}\,\big|\,\frac{5}{15}$
$4\frac{3}{5}\,\big|\,\frac{9}{15}$ add.

$967\frac{14}{15}$ Qu.
$2\frac{3}{8}$

1934 und $2 \times \frac{14}{15} = 1\frac{13}{15}$; $967 \cdot \frac{3}{8} = 362\frac{5}{8}$;
$\frac{3}{8} \cdot \frac{14}{15} = \frac{7}{20}$

add.		120
	$1\frac{13}{15}$	104
	$362\frac{5}{8}$	75
	$\frac{7}{20}$	42
	$5\frac{2}{3}$	80

$2302\frac{301}{120} = 2304\frac{61}{120}$ Englisch.

$$
\begin{array}{l}
2304\,\tfrac{61}{120}\text{ Englisch} \\
\quad 32 \\
\hline
4608 \\
6912 \\
\hline
73728 \text{ und } 32 \cdot \tfrac{61}{120} = 16\,\tfrac{4}{15} \\
\quad 16\,\tfrac{4}{15} \text{ add.} \\
\quad 20 \text{ add.} \\
\hline
73764\,\tfrac{4}{15} \text{ Aß.}
\end{array}
$$

§. VI.

Kleinere Einheiten in größere zu verwandeln.

Aufl. Man sehe, wie viel von den kleineren Einheiten eine größere in sich enthält, und dividire damit in die vorgegebene Menge dieser kleinern Einheiten.

Bew. Denn 5 Pfund = 5 . 32 Lothe; Also

$$\frac{5 \cdot 32}{32} = \frac{160}{32} = 5 \text{ Pf.}$$

Exempel.

Wie viel betragen 384 Gr. an Thalern? Da 24 Gr. einen Thaler ausmachen, so dividire man mit 24 in 384, wie folget:

$$
\begin{array}{r|r|l}
24 & 384 & 16 \text{ Thlr.} \\
 & 24 & \\
\hline
 & 144 & \\
 & 144 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Wenn

Wenn jemand wissen wollte, wie viel 110 Thlr. an Ducaten, den Ducaten zu $2\frac{3}{4}$ Thlr. gerechnet, betragen; so würde es ihm folgende Rechnung zeigen:

$$110 : 2\tfrac{3}{4} = 110 : \tfrac{11}{4} = 110 \times \tfrac{4}{11} = 40$$ Duc.

Jemand hat 40 Kreuzer, deren 60 einen Gulden ausmachen; Wie viel trägt dies Geld an Gulden aus? So viel als:

$$40 : 60 = \tfrac{40}{60} = \tfrac{2}{3}$$ Gulden oder Fl.

Wie viel Mark beträgt 678 Karat Gold?

Da 1 Mrk. = 24 Kar. ist, so hat man folgende Rechnung:

```
24|678|28
  |48 |
  -----
   198
   192
  -----
   6 Kar.
```

Also 678 Karat = 28 Mrk. und 6 Karat. Aber 6 Karat = $\frac{6}{24}$ Mrk. = $\frac{1}{4}$ Mrk. folglich 678 Kar. = $28\frac{1}{4}$ Mrk.

§. VII.

Eine Größe die durch auf einander sich beziehende Einheiten von verschiedenen Benennungen beschrieben ist, durch Einheiten von der dabey vorkommenden größten Benennung auszudrücken.

Aufl.

Aufl. Mittelst des VI. §. bringe man die kleinsten Einheiten, auf die nächst größere, und addire dazu die Einheiten, so von dieser nächst größern vorhanden sind. Auf gleiche Art bringe man diese Summe auf die nächst folgende größere Einheit, und addire ebenfalls die Einheiten dazu, die von dieser nächstfolgenden größern vorhanden sind. So fahre man fort, bis man das Verlangte hat.

Exempel.

15 Lachter, 3 Achtel, 7 Zoll, sollen unter den Namen Lachter gebracht werden. Mittelst der gegebenen Auflösung verfährt man so: da 1 Achtellr. = 10 Zoll, so ist 7 Zoll = $\frac{7}{10}$ Achtellr. Also hat man nun 15 Lr. 3 $\frac{7}{10}$ Achtellr. vor sich. Aber 3 $\frac{7}{10}$ Achtellr. = $\frac{3\frac{7}{10}}{8}$ Lr. = $\frac{\frac{37}{10}}{8}$ Lr. = $\frac{37}{80}$ Lr. folglich 15 Lr. 3 Achtellr. 7 Zoll = 15 $\frac{37}{80}$ Lr.

Wie viel beträgt 7 Thlr. 8 Gr. 9 Pf. an Thalern? dies zeigt folgende Rechnung:

24 12

7 Thlr. 8 Gr. 9 Pf.

9 : 12 = $\frac{9}{12}$ = $\frac{3}{4}$ Gr.

8 $\frac{3}{4}$ Gr. : 24 = $\frac{\frac{35}{4}}{24}$ Thlr. = $\frac{35}{96}$ Thlr.

Also 7 Thlr. 8 Gr. 9 Pf. = 7 $\frac{35}{96}$ Thlr.

§. VIII.

Eine Größe die so ausgedruckt ist, wie es der vorige §. verlangt, durch Einheiten von mittlerer Benennung anzugeben. Z. E. eine Größe, die nach Centnern, Pfunden, Lothen, Quentchen ausgemessen ist, durch Pfunde auszudrücken.

Aufl. Man bringe (nach IV. und V. §.) die größern Einheiten, auf die von vorgegebener mittlerer Benennung (wie hier die Centn. auf Pf) und eben darauf auch (nach VI. und VII. §.) die kleinern Einheiten, (wie hier im Beyspiel die Quent. und Lothe auf Pfunde). Addire nun, was man durch diese beyden Arbeiten erhält, (wie hier im Ex. die nach IV. und V. §. erhaltene Pfunde und die, so man nach VI. und VII. §. erhielt); so hat man das Verlangte.

Exempel.

Man will 4 Centn. 8 Pf. 5 Loth, und 2 Qu. blos durch Pfunde ausdrücken; so ist die Rechnung folgende:

110 32 4 Cent. 8 Pf. 110 448 Pf.	4 5 Lt. 2 Qu. $5\frac{1}{2}$ Loth 32 div. giebt $\frac{11}{64}$ Pf. 8 Pf. add. $8\frac{11}{64}$ Pf. 448 Pf. add. $456\frac{11}{64}$ Pf. das Verlangte.

Einer hat nach dem cöllnischen Silbergewichte $21\frac{3}{4}$ Mrk. $27\frac{2}{3}$ Unz. $12\frac{1}{2}$ Loth, $18\frac{5}{8}$ Qu. $23\frac{1}{5}$ Engl. und 48 Aß, Silber, und will dieses Gewicht in Lothen ausgedruckt haben. Folgende Rechnung wirds thun:

$$\overset{8}{21\tfrac{3}{4}}\ \text{Mk.}\ \overset{2}{27\tfrac{2}{3}}\ \text{Uz.}\ \overset{4}{12\tfrac{1}{2}}\ \text{Lt.}\ \overset{2\frac{3}{8}}{18\tfrac{5}{8}}\ \text{Qu.}\ \overset{32}{23\tfrac{1}{5}}\ \text{Engl.}\ 48\ \text{Aß}$$

8

168 Unz.
6 add. weil $8 \cdot \frac{3}{4} = 6$
$27\frac{2}{3}$ Unz. add.

$201\frac{2}{3}$ Unz.
2

402
$1\frac{1}{3}$ add. weil $2 \cdot \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$
$12\frac{1}{2}$ =

$415\frac{5}{6}$ Loth.
$7\frac{41}{160}$ = add.

$423\frac{43}{480}$ das Verlangte.

$48 : 32 = 1\frac{1}{2}$ Engl.
$23\frac{1}{5}$ = add.

giebt, $24\frac{7}{10}$ Engl.
$24\frac{7}{10} : 2\frac{3}{8} = \frac{247}{10} \times \frac{8}{19} = \frac{13}{5} \cdot \frac{4}{1}$ (§. 75 u. dessen Erl.)

$$\overset{40}{=}\ 10\tfrac{2}{5}\ \text{Qu.}\ |\ 16\ |$$
add. $18\frac{5}{8}$ = | 25 |

$29\frac{1}{40}$ Qu. Aber $29\frac{1}{40} : 4 = 7\frac{1}{4} + \frac{1}{160} = 7\frac{41}{160}$ Loth.

Dies sind die Sätze der Resolution, in so ferne wir darunter das Geschäfte verstehen, das §. II. ist beschrieben worden. Man lehrt zwar in der Resolution gemeiniglich größere Einheiten auf kleinere zu bringen; da aber öfters die Rechnungen nicht wenig abgekürzt werden können, wenn man die verschiedenen Einheiten, nicht sowohl in kleinste als in andere verwandelt; so haben wir hier der Resolution eine größere Ausdehnung gegeben.

Reduction.

§. IX.

In einer Menge kleinern Einheiten, die

eine oder etliche nächst größere in sich enthält, diese nächst größern zu finden.

Aufl. Man dividire die Menge kleiner Einheiten durch die Zahl, welche anzeigt, wie viel Einheiten von ihr auf die nächst größere gehen; der Quotient wird das Verlangte geben; der Rest aber zeigt noch welche von kleinern Einheiten an. Sind nun noch nächst größere vorhanden, so addirt man die gefundenen nächst größern, dazu.

Exempel.

Wie viel betragen 510 Lothe, Pfunde? So viel wie nachstehende Rechnung zeigt:

```
32 | 510 | 15
   | 32  |
-----------
    190
    160
-----------
     30
```

Also 15 Pf. 30 Loth.

Es sollen 5 Thlr. und 430 Gr. reducirt, oder die Groschen auf Thlr. gebracht, und alsdann diese durch 5 Rthlr. und 430 Gr. ausgedruckte Grösse auf gewöhnliche Art (§. II.) beschrieben werden. Die Rechnung ist so:

```
          24
          ⌣
5 Rthlr. 430 Gr. | 13 Rthlr.
          24     |
-----------------
          90
          72
-----------------
        18 Gr.
```

Also

Also 5 Rthlr. 430 Gr. = 5 Rthlr. + 13 Rthlr. + 18 Gr. = 18 Thlr. 18 Gr.

§. X.

Eine Größe, die durch drey, oder mehrerley verschiedene, sich auf einander beziehende Einheiten ausgedruckt ist, worunter sich aber ein oder mehrere Mengen der kleinern Einheiten befinden, die eine ihrer nächst größern ein oder etlichmal in sich enthalten, zu reduciren, oder auf gewöhnliche Art (II.) auszudrücken.

Aufl. Man fange bey der kleinsten Einheit an, und wenn von derselben so viele oder mehrere vorhanden sind, als eine oder etliche der nächst höhern, betragen, so verfahre man damit nach §. IX. (dadurch erhält man nämlich, daß von der kleinsten Einheit, wenigere, als eine der nächst größern beträgt, vorkommen). Ist nun dieses geschehen, so sehe man, ob von dieser nächst größern, gleich nach der kleinsten folgenden Einheit, so viele als eine oder mehrere der nun gleich nach dieser folgenden größern Einheit, beträgt, vorhanden sind oder nicht. Im ersten Fall verrichtet man die Reduction nach §. IX. im 2ten aber ist keine nöthig. Und solchergestalt verfahre man mit allen verschiedenen sich aufeinander beziehenden Einheiten bis auf die größte.

Exempel.

Man will 5 Cent. 900 Pf. 85 Lothe reducirt haben. Folgende Rechnung wirds thun.

110 32

5 Centn. 900 Pf. 85 Lothe.

Div. 32 | 85 | 2
| 64 | 900 Pf. add.

21 Lt. 902
(110) div. | 8 Cent.
880 | 5 - add.

22 Pf. 13 Centn.

Also 5 Centn. 900 Pf. 85 Loth. = 13 Centn. 22 Pf. 21 Lothe.

Bey Ausrechnung eines Markscheiderzugs findet man, daß ein Stolln 24 Lr. 35 Achtellr. 17 Zoll und 14 Primen, Seigerteufe einbringt; Man will dies auf die gewöhnliche Art ausdrücken. Man wird, wie nachstehend, verfahren:

8 10 10

24 Lr. 35 Achtellr. 17 Zoll, 14 Pr.

10 | 14 | 1 Zoll

4 Pr. 17

18 Zoll | 1 Achtellr.
(10) 35

8 Zoll 36 | 4 Lr.
(8) | 24

4 Achtellr. 28 Lr.

Also erhält man nun

28 Lr. 4 Achtellr. 8 Zoll, 4 Pr.

In

In einer Zeitrechnung ist diese Zeit 11 Wochen, 26 Tage, 5 Stunden, 387 Min. 17 Sec. herausgekommen, und soll reducirt werden. Die Rechnung sieht so aus:

```
   7     24    60    60
11 W. 26 T. 5 St. 387 M. 17 Sec.

60|387 |  6
  |36  |  5 add.
  -----   -----
27 Min.  11 St.
   7|26  |  3 Wochen
    |21  |  11 "
   -----  -------
  5 Tage  14 Wochen.
```

Folglich 14 Wochen, 5 Tage, 11 St. 27 Min. 17 Sec. Hier war weder bey den Secunden noch Stunden einige Reduction nöthig.

§. XI.

Wenn bey irgend einer Menge größern Einheiten ein eigentlicher Bruch ist, den Werth desselben durch die nächst kleinere Einheit auszudrücken.

Aufl. Man multiplicire den Zähler des Bruchs durch die Zahl, welche anzeigt, wie viel solche nächst kleinere Einheiten, worauf der Bruch gebracht werden soll, auf eine der größern gehen, bey welchen sich der Bruch befindet. Dieses Product dividire man durch den Nenner des Bruchs, so hat man das Verlangte.

 Sind

Sind nun schon solche Einheiten, worauf der Bruch reducirt werden soll, vorhanden, so addirt man die gefundenen dazu.

Sollte aber bey dieser Summe der gleichgedachten Einheiten, noch ein Bruch vorkommen, so wird solcher auf gleiche Art, auf die nächst folgende kleinere gebracht, und solchergestalt so lange fortgefahren, bis alle Einheiten, die kleinste ausgenommen, von Brüchen völlig befreyet sind.

Bew. $7 \frac{3}{8}$ Cent. = 7 Cent. + $\frac{3}{8}$ Cent. = 7 Cent. + $\frac{3}{8} \cdot 110$ Pf = 7 Cent. + $\frac{330}{8}$ Pf. = 7 Cent. + $41 \frac{1}{4}$ Pf. = 7 Centner + 41 Pf. + $\frac{1}{4}$ Pf. = 7 Cent. + 41 Pf. + $\frac{1}{4} \cdot 32$ Loth = 7 Cent. + 41 Pf. + 8 Loth = 7 Cent. 41 Pf. 8 Loth.

Es sollen $7 \frac{3}{8}$ Ruthen, $2 \frac{1}{4}$ Fuß und 3 Zoll reducirt werden. Nachstehende Rechnung wirds thun.

$$\overset{10}{\smile}\quad\overset{10}{\smile}$$

$$7 \tfrac{3}{8} \text{ Ruthe},\ 2 \tfrac{1}{4} \text{ Fuß},\ 3 \text{ Zoll}.$$

$$\tfrac{3}{8} \cdot 10 = \tfrac{30}{8} = 3 \tfrac{3}{4} \text{ Fuß}$$

$$\underline{2 \tfrac{1}{4} \text{ Fuß, add.}}$$

$$6 \text{ Fuß}.$$

Also $7 \frac{3}{8}$ Ruthen, $2 \frac{1}{4}$ Fuß, 3 Zoll = 7 R. 6 Fuß, 3 Zoll.

Bey der Auflösung dieses §. ist noch zu bemerken, daß, obgleich dadurch eine vorgegebene, aus verschiedenen auf einander sich beziehenden Einheiten

heiten bestehende Größe, von Brüchen entweder gänzlich befreyet, oder, wo ein Bruch noch übrig bleibt, derselbe auf die kleinste Einheit gebracht wird, sich doch Mengen der bekannten Einheiten finden können, die aus so vielen oder mehrern bestehen, als eine in der nächst größern beträgt. Wo nun dieses mit vorkommt, wird man sich schon aus §. IX. und X. zu helfen wissen. Folgendes Exempel aber, wird zu diesem Fall gehören.

Es sollen reducirt werden

$5\frac{7}{8}$ Thl. $22\frac{2}{3}$ Gr. $8\frac{5}{9}$ Pf. 0 Heller, die Rechnung ist so:

$\frac{7}{8} \times 24 = \frac{168}{8} = 21$ Gr.
$22\frac{2}{3}$ add.

$43\frac{2}{3}$ Gr. = 1 Thl. $19\frac{2}{3}$ Gr.

$\frac{2}{3} \times 12 = \frac{24}{3} = 8$ Pfen.
$8\frac{5}{9}$ add.

$16\frac{5}{9}$ Pf. = 1 Gr. $4\frac{5}{9}$ Pf.

$\frac{5}{9} \times 2 = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$ Heller.

Also ist $5\frac{7}{8}$ Thl. $22\frac{2}{3}$ Gr. $8\frac{5}{9}$ Pfen. = 5 Thl. 43 Gr. 16 Pfen. $1\frac{5}{9}$ Heller = 6 Thl. 20 Gr. 4 Pfen. $1\frac{5}{9}$ Heller. (§. IX, X.)

Der Nutzen, der von III — XI. §. ausgeführten Regeln, wird sich durch die nun folgenden arithmetischen Operationen zeigen, und nicht nur allein in diesen, sondern auch in vielen andern.

Addition
in benannten Zahlen.
§. XII.
Benannte Zahlen zu addiren.

Aufl. Man schreibe alle Zahlen, die einerley Benennung führen, in eine Reihe untereinander, und addire jede solche Reihe besonders.

Man fange aber mit der Addition bey derjenigen Reihe an, die die kleinste Benennung hat; und reducire die Summe jeder Reihe, (die ausgenommen, die aus Zahlen der größten Einheiten besteht,) gleich auf die nächst größere Benennung, wenn nämlich diese Summe so groß ist, daß sie eine oder etliche nächst größere Einheiten in sich enthält. Diese dadurch erhaltenen nächst größern Einheiten nun, addire man mit zur nächst größern Reihe, und die, die von der Summe zurück geblieben sind, schreibe man unter der Reihe, von der die Summe entstanden ist.

Kommen in der Reihe, wo sich die Zahlen der kleinsten Einheit befinden, Brüche vor, so wird man aus der Lehre von Brüchen sich erinnern, wie man damit zu verfahren habe.

Exempel.

Wie groß ist die Summe folgender Geldposten, als:

230 Thl.	14 Gr.	8 Pfen.
14 =	4 =	5 =
4 =	12 =	—
11 =	5 =	4 =
50 =	—	—
110 =	4 =	2 =
72 =	21 =	10 =
7 =	7 =	7 =
—	5 =	4 =
501 Thl.	3 Gr.	4 Pfen.

Folgende Posten sind zu addiren.

4785 Centner,	3 Stein,	8 Pf.	3 Loth.
98721 =	4 =	—	1 =
938 =	—	19 =	—
104444 Centner,	8 Stein,	5 Pf.	4 Lt. Sum.

Hier ist angenommen worden, daß der Centner = 5 Stein, der Stein aber = 22 Pf. sey.

Folgende Posten an Eisen sind zu addiren, als:

15 Waag,	1 Stein,	12 Pf.	Stab Eisen.
877 =	—	19 =	Reif Eisen.
79 =	—	—	Nagel Eisen.
972 Waag	—	8 Pf.	Summe.

Hier ist die Waag = 2 Steine = 44 Pf. gesezt.

Nachstehendes Gewicht ist zu addiren, nämlich:

Mrk.

Mrk.	Kar.	Gr.	
45	17	11 $\frac{5}{8}$	$\frac{15}{24}$
23	20	10 $\frac{7}{12}$	$\frac{14}{24}$
14	12	8 $\frac{1}{2}$	$\frac{12}{24}$
9	7	5 $\frac{3}{4}$	$\frac{18}{24}$
6	18	9 $\frac{1}{6}$	$\frac{4}{24}$
100 Mrk.	5 Kar.	9 $\frac{5}{8}$ Gr.	$\frac{63}{24}$ Summe.

Subtraction
in benannten Zahlen.

§. XIII.

Von einer größern benannten Zahl eine kleinere zu subtrahiren.

Aufl. Man schreibe die Zahlen, eben so wie §. XII. unter einander, und ziehe jeden Theil der kleinern Zahl von demjenigen der größern, der mit ihm einerley Benennung führt, ab. Ist aber dieser Theil der größern Zahl kleiner als der, welchen man davon nach der izt gegebenen Regel subtrahiren soll; so borge man von dem Theil, der die nächst größere Benennung hat, eins weg, und rechne dafür so viele Einheiten zur nächst kleinern Reihe so viele nämlich diese geborgte Einheit ausmachen.

Sind in der Reihe, die aus Zahlen der kleinsten Einheit besteht, Brüche vorhanden, so verrichte man die Subtraction dieser Brüche (nach 74 und dessen Erl.) besonders.

Exem-

Exempel.

15 Ruthen,	9 Fuß,	3 Zoll,	7 Linien	
8	4	10	3	
7 Ruthen,	4 Fuß,	5 Zoll,	4 Lin.	Differ.

568 Lr.	5 Achtellr.	7 Zoll,	3 Pr.	
19	6	9	8	
548 Lr.	6 Achtellr.	7 Zoll,	5 Pr.	Differ.

28 Thl.	14 Gr.	3 ½ Pf.	
19	21	8 5/8	
8 Thl.	16 Gr.	6 7/8 Pf.	Differ.

97 Centn.	0 Pf.	0 Loth.	
24	73	3	
72 Centn.	36 Pf.	29 Loth.	Differ.

Wie viel sind vom 7. Mey 1757 bis zum 19 Mey 1779 Jahre, Monate und Tage verflossen?

Da vom Anfange des Jahrs 1757 bis zum 7. Merz, 2 Monate, 7 Tage, und vom Anfange des Jahrs 1779 bis zum 19 Mey, 4 Monate und 19 Tage verflossen sind; so ist die Rechnung folgende:

1779 J.	4 Mon.	19 Tage
1757	2	7
22 J.	2 Mon.	12 Tage.

Multi-

Multiplication
benannter Zahlen durch ganze Zahlen.

§. XIV.

Eine benannte Zahl durch eine ganze Zahl zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire nach einander die verschiedenen Theile der benannten Zahl; und zwar mache man bey dem Theil, welcher die kleinste Benennung führt, den Anfang, und gehe so dann zu den nächst größern Theilen fort.

Nun können alle gefundene Producte der Theile der benannten Zahl, oder auch nur einige, einer Reduction benöthigt seyn: daher reducire man das, so es erfodert, auf die nächst größere Benennung (nach §. IX.). Dies kann nun entweder gleich bey der Multiplication jedes Theils geschehen, oder nachdem sie alle multiplicirt sind. Ist im Multiplicando bey dem Theil der kleinsten Benennung ein Bruch vorhanden, so multiplicire man denselben durch den Multiplicator. Kommt nun ein uneigentlicher Bruch heraus, so suche man die Ganzen desselben, und schreibe den überbliebenen Bruch, welcher die kleinste Benennung führt, ins Product, die gefundenen Ganzen aber, addire man zu dem, aus der ganzen Zahl des Theils der kleinsten Benennung entstandenem Product.

Exempel.

Wie viel machen 213 Gulden, 14 Stüber, 9 Pf. doppelt genommen?

Ein Stüber = 16 Pf. 1 Gulden = 20 Stüb. und die Rechnung ist folgende:

213 Fl. 14 St. 9 Pf.	
	2
427 Fl. 9 St. 2 Pf. Product.	

Es sollen 1198 Cent. 14 Pf. 18 Loth durch 35 multiplicirt werden. Folgende Rechnung wirds thun.

1198 Cent.	14 Pf.	18 Loth
35	35	35
5990	70	90
35944	429	54
41934 Cent.	1	32 | 630 L. | 19 ℔
	110 | 509 Pf. | 4 Ct.	32
	440	310
	69 Pf.	288
		22 Loth

Also das Product =
41934 Centn. 69 Pf. 22 Loth.

Wird die nach dem Apothekergewicht ausgedruckte Größe: 5 ℥ 2 ℈ 12 Gr. mit 100 multiplicirt; so giebt folgende Rechnung das Product.

```
  3        20
5 ʒ       2 ℈       12 Gran.
                     100
-------------------------------------------------
  500       200          20|1200 Gr.|60 ℈
   86        60            |1200    |
8|586|73 ℥  3|260 ℈|86 ʒ        ø
 | 56 |      |24   |
 |  26|        20
   2 ʒ         18
               2 ℈

12|73 ℥|6 Pf.
  |72  |
    1 ℥
```

Also 6 Pf. 1 ℥, 2 ʒ, 2 ℈, das Product.

In diesem Exempel hatte man im Multiplicando, Drachmen, Scrupel und Grane, im Producte aber erhielte man Pfunde, Unzen, Drachmen, Scrupel und Grane: Es können also, besonders wenn der Multiplicator eine sehr große Zahl ist, in das Product noch Einheiten grösserer Benennung als im Multiplicando sind, kommen.

Es sind 574 Thl. 15 Gr. 8 $\frac{3}{4}$ Pf. mit 9 zu multipliciren; die Rechnung steht so:

574 Thl.	15 Gr	$8\frac{3}{4}$ Pf.
		9
5166 Thl.	135	$72\ \frac{27}{4}$
5 =	6	$6\frac{3}{4}$ add.
5171 Thl.	24 | 141 | Gr.	5 Th. 12 | $78\frac{3}{4}$ | 6 Gr.
	| 120	| 72
	21 Gr.	$6\frac{3}{4}$ Pf.

§ XV.

Folgendes kann als ein Vortheil bey der Reduktion dienen, die man bey der Multiplication zugleich mit anzustellen hat.

Wenn der Multiplicator aus so vielen Einheiten besteht, als Einheiten von der kleinern Benennung eine von den nächst größern ausmachen, so kommen für das Product dieser kleinern Einheiten, eben so viel der nächst größern, als von diesen kleinern Einheiten vorhanden sind. Ist aber der Multiplicator zweymal, dreymal, viermal u. s. w. groß, als die Anzahl der kleinern Einheiten, die eine der nächst größern ausmachen, so darf man nur die vorhandenen kleinern Einheiten mit 2, 3, 4 u. s. f. multipliciren und dem Producte die nächst größere Benennung geben. Denn

6 Drachmen $\times$ 8 $=$ 6 . 8 Drachmen $=$ $\frac{6 \times 8}{8}$ Unz. (§. IX. und weil 8 ʒ $=$ 1 ℥) $=$ 6 Unzen.

Ferner $4\,ʒ \times 16 = 4 \cdot 16\,ʒ = 4 \cdot 2 \cdot 8\,ʒ = \frac{4 \cdot 2 \cdot 8}{8}\,ʒ = 2 \cdot 4\,ʒ$; und

15 Gr. $\times 72 = 15 \cdot 72$ Gr. $= 15 \cdot 3 \cdot 24$ Gr. $= \frac{15 \cdot 3 \cdot 24}{24}$ Thl. $= 15 \cdot 3$ Thl. $= 45$ Thl.

Division
benannter Zahlen
durch
ungenannte und benannte ganze Zahlen.

§. XVI.

Es ist bekannt, daß man den Dividendus als ein Product des Divisors und Quotientens ansehen kann. Nun ist offenbahr der Multiplicator allezeit eine unbenannte Zahl; und das Product wird, der Benennung nach, dem Multiplicando ähnlich gefunden: Also muß auch in der Division, entweder der Divisor oder der Quotiente eine unbenannte Zahl seyn. Mithin entstehen zwey Arten der Division in benannten Zahlen. Die erste Art ist die, wo der Divisor eine unbenannte Zahl und folglich der Quotiente eine benannte, die der Benennung nach dem Dividendo ähnlich ist. In der zweyten Art ist der Divisor eine benannte Zahl, der Benennung nach, dem Dividendo ähnlich, und der Quotiente eine ungenannte Zahl.

Wir

Wir wollen zu erst die erste Art vor uns nehmen, und zwar izt nur die Fälle, wo der Divisor eine ungenannte ganze Zahl ist; denn die Fälle, wo er ein Bruch ist, wollen wir weiter unten betrachten.

Division benannter Zahlen,

A) durch unbenannte ganze Zahlen.

§. XVII.

Eine benannte Zahl durch eine unbenannte ganze Zahl zu dividiren.

Aufl. Man dividire nach einander die Theile der benannten Zahl, so, daß man mit dem Theil, der die größte Benennung führt, anfängt, und alsdann auf die nächst niedrigern fortgeht.

Die Reste resolvire man allemal auf die nächst kleinere Benennung, (§. V.) und rechne sie jedesmal zu dem Theil des Dividendi, der diese nächst kleinere Benennung führt.

Der Dividendus kann öfters aus keinen Theilen von geringerer Benennung bestehen; Aber demohngeachtet, pflegt man, in so ferne in der Division ein Rest bleibt, den Quotienten durch kleinere Einheiten mit auszudrücken. In diesem Falle verfährt man mit dem Dividiren nicht anders, als wie izt gelehrt worden ist; nur betrachtet man im Dividendo die Stellen der kleinern Einheiten als ledig. Wenn ferner im Dividendo der Theil,

der die größte Benennung hat, kleiner als der Divisor ist, so können davon im Quotienten keine Ganzen kommen; Alsdenn aber muß man diesen Theil so gleich auf die nächst kleinere Benennung bringen, und, so dann, wie vorhin gelehrt, die Division verrichten. Hätte man nun von dieser kleinern Benennung noch nicht so viel Einheiten als der Divisor hat, so ist fernere Resolvirung nöthig, und also diese auf die gleich nach ihnen folgende kleinere Benennung zu bringen. Wäre aber keine kleinere weiter gebräuchlich; so wird der Quotiente in der Gestalt eines Bruchs angezeigt. Wenn endlich im Dividendo bey dem Theil der kleinsten Benennung ein Bruch vorkommt, so dividirt man zwar wie vorher, den Rest aber, der in der Division des Theils der kleinsten Benennung, bey dem sich der Bruch befindet, übrig bleibt, addirt man mit zugleich gedachtem Bruche, und dividirt nun diese Summe, wie in der Division mit gebrochenen Zahlen, (64) ist gelehrt worden.

Exempel.

Wie viel beträgt der 12te Theil von 265 Thl. 14 Gr. 8 Pf.? Folgende Rechnung wird es zeigen:

Quot.

12 | 265 Thl. 14 Gr. 8 Pf. | 22 Thl. 3 Gr. $2\frac{2}{3}$ Pf.

```
24
――――
25
24
――――
 1 Thl.
24
――――
24
14
――――
38 Gr.
36
――――
 2 Gr.
12
――――
24
 8
――――
32 Pf.
24
――――
```

$\frac{8}{12}$ Pf. = $\frac{2}{3}$ Pf.

Vor Alters ist zu Freyberg und an andern Orten denen Gewerken ihre Ausbeute, so wie dem Landesherrn der Zehnde, erst an Erzten nach Kübeln gestürzt, hernach aber an Brandsilber bis 1529 ausgetheilt worden. Wenn nun damals von irgend einer Zeche zu Freyberg 18 Gewerken 2649 Mrk. Silber erhalten hätten, so, daß jeder Gewerke gleich viel bekäme; so ist die Frage: Wie viel

viel ist jedem von diesen Mrk. Silber zugekommen? Da es 18 Gewerken sind, so muß durch 18, wie nachstehend, dividirt werden.

```
18 | 2649 Mrk | 147 Mrk. 2 Loth, 2⅔ Qu.
   | 18       |
   ----------
     84
     72
   ----------
     129
     126
   ----------
       3 Mrk.
      16
   ----------
      48 Loth.
      36
   ----------
      12 Loth.
       4
   ----------
      48 Qu.
      36
   ----------
```

$\frac{12}{18}$ Qu. = $\frac{2}{3}$ Qu.

Wenn jemand seinem Bedienten 10 Thl. des Jahrs Lohn giebt: Wie viel muß er demselben in einem Monate geben? Hier müssen die 10 Thl. durch 12 getheilt werden; aber 12 > 10; daher sind die 10 Thl. erst auf die Groschen zu bringen, wie folget:

```
12 | 10 Thl. | 20 Gr.
   | 24
   ----------------
     240 Gr.
     240
   ----------------
      0
```

Es sind 2 Centner, 3 Pfund, 8 Loth durch 2984 zu theilen: Wie viel kommt heraus? Dies zeigt folgende Rechnung.

```
2984 | 2 Cent. 3 Pf. 8 Loth | 2 Loth, 1 215/376 Qu.
     | 110
     ----------------
        223 Pf.
         32
     ----------------
        454
       669
     ----------------
       7144 Loth
       5968 = 2984 × 2
     ----------------
       1176 Loth
          4
     ----------------
       4704 Qu.
       2984   8
       ----
       1720 | 215
       ---- | ---  Qu.
       2984 | 378
```

Ein Stück Geld wiegt 5 Mrk. 6 Ʒ, 9 Engl. $20\frac{3}{4}$ Aß; dasselbe soll in 16 gleiche Theile ge-

 theilt

theilt werden; Wie schwer wird ein Theil seyn? Dies wird folgende Rechnung angeben:

```
       8    20   32                 Quot.
16 | 5 Mk. 6℥, 9 Eng. 20¾ Aß | 2℥ 18 Eng. 3 19/64 Aß
     8
    ----------
    46 ℥
    32
    ----------
    14
     20
    ----------
    289 Engl.
    16
    ----------
    129
    128
    ----------
      1
     32
    ----------
     52 Aß
     48
    ----------
      4 Aß
     ¾ · add.
    ----------
```

$4\frac{3}{4} = \frac{19}{4}$; und $\frac{19}{4} : 16 = \frac{19}{64}$ Aß.

B) Durch benannte ganze Zahlen.

§. XVIII.

Hier frägt man: wie vielmal steckt der Divisor im Dividendo? oder, was für ein aliquoter

ter Theil ist der Divisor vom Dividendo. Z. E. wie vielmal steckt eine Menge von 305 Thl. in einer von 68972 Thl.? Da hingegen in der ersten Art (§. XVII.) die Frage war: wie groß ist ein gewisser aliquoter Theil des Dividendi? Z. B. wie groß ist der 75ste Theil von 987 Centner?

Ob nun wohl Divisionsexempel der zwoten Art selten vorzukommen pflegen, und man daher diese Art der Division in vielen Rechenbüchern unberührt antrift; so ist sie doch von sehr großen Nutzen, und macht den vornehmsten Theil der Regel de Tri aus. Deswegen wollen wir hier kürzlich davon reden.

§. XIX.

Eine benannte Zahl durch eine benannte zu dividiren.

Aufl. Man resolvire sowohl den Divisor als Dividendum auf einerley Benennung; Alsdenn dividire man die Zahl, welche für den Dividendum, durch die, die für den Divisor gefunden worden ist; so erhält man den gesuchten Quotienten, der entweder eine unbenannte ganze oder gebrochene Zahl seyn wird.

Denn wenn man bedenket, daß, wenn der Divisor und Dividendus Größen sind, die nur durch eine und eben dieselbe Einheit z. E. dnrch Thl. ausgedruckt sind, sie blos als ungenannte Zahlen angesehen werden können: z. E. 56 Thl. : 8 Thl.

$= \frac{56 \text{ Thl.}}{8 \text{ Thl.}} = \frac{56 \cdot 1 \text{ Thl.}}{8 \cdot 1 \text{ Thl.}} = \frac{56}{8}$) so wird man von selbst einsehen, daß, so bald Divisor und Dividendus, entweder einer von diesen oder beyde zugleich, solche benannte Zahlen sind, die mit verschiedenen Einheiten ausgemessen seyn, beyder Resolvirung auf einerley Benennung nöthig ist.

Man sieht auch leicht, daß es einerley ist, auf was für eine Benennung der Divisor und Dividendus gebracht worden, wenn sie nur eine und eben diese Benennung führen. Man könnte sie auf irgend eine beliebige mittlere Benennung bringen, und alsdenn dividiren. Aber sodann würden auch Brüche durch einander zu dividiren aufstoßen; Daher ist dies wohl der kürzeste und natürlichste Weg, wenn man den Divisor und Dividendum auf eine und eben dieselbe kleinste Benennung bringt; deswegen müssen beyde Größen, Divisor und Dividendus, obgleich in einer von diesen keine so kleinste Benennung vorkommen sollte, als in der andern, auf eine und eben dieselbe kleinste Benennung, die in einer von den beyden vorhanden ist, gebracht werden.

Exempel.

Es sollen 56 Centn. 8 Pf. 3 Loth durch 3 Centner, 19 Pf. 12 Loth dividirt werden: Wie groß ist der Quotiente? Folgende Rechnung wirds zeigen.

Divisor	Dividendus	
3 Cent. 19 Pf. 12 Lt.	56 Cent. 8 Pf. 3 Loth.	
110	110	
349	568	
32	56	
710	6168	
1047	32	
	12339	
	18504	
11180 Loth.	197379 Lt.	17 $\frac{563}{560}$ Quot.
	11180	
	85579	
	78260 13	
	7319	563
	11180	760 or 60

Der wie vielste Theil von 488 Thl. 16 Gr. 10 Pf. ist 61 Thl. 2 Gr. 1 $\frac{1}{4}$ Pf. Nachstehende Rechnung wird es zeigen.

Divisor	Dividendus	
61 Thl. 2 Gr. $1\frac{1}{4}$ Pf.	488 Thl. 16 Gr. 10 Pf.	
24	24	
246	1968	
122	976	
1466	11728	
12	12	
2933	23466	
1466	11728	
17593 Pf.	140746 Pf.	
4	4	
70373 Viert. Pf.	562984 Viert. Pf.	8 Quot.
	562984	
	0	

Also der achte Theil.

Es sind 147 Pfund Sterl. 9 Schillinge, 8 Pf. durch 5 Pfund Sterl. zu dividiren. Nach der beschriebenen Art, müssen beyde, der Dividendus und Divisor auf Pfen. resolvirt werden.

	Dividendus	
	20 12	
5 Pf. Sterl.	147 Pf. Sterl. 9 ß. 8 Pf.	
20	20	
100	2949	
12	5898	
	8	
Divisor 1200 Pf.	35396 Pf.	29 $\frac{149}{300}$ Quot.
	24	
	113	
	108 4	
	596 | 149	
	1200 | 300	

Dieses Exempel kann leichter ausgerechnet werden, wenn man die für den Divisor gegebene 5 Pf. Sterl. nicht auf Pfennige resolvirt, sondern den ganzen Dividendus auf die Benennung **Pfund Sterling** bringt; wie folget:

Dividendus

$$\overbrace{147\ \text{Pf. Sterl.}\quad 9\ \text{ß.}}^{20}\ \overbrace{\quad 8\ \text{Pf.}}^{12}$$

8 Pf. = $\frac{8}{12}$ ß. = $\frac{2}{3}$ ß.
9 ß. od. Schill. dazu add.

$9\frac{2}{3}$ ß. = $\frac{29}{3}$ ß; durch 20 div.
giebt $\frac{29}{60}$ Pf. Sterl.
147 addirt

Divisor 5 Pf. St.	147 $\frac{29}{60}$ Pf. Sterl.	29 $\frac{149}{300}$ Quot. wie vorhin.
	10	
	47	
	45	
	2 $\frac{29}{60}$ = $\frac{149}{60}$.	

In welchen Fällen nun, diese lezte Art zu dividiren vortheilhafter ist, als die vorherbeschriebene, wollen wir izt gleich zeigen.

§. XX.

Im vorigen §. brachte man, um die Brüche im Dividiren zu vermeiden, den Dividendum und Divisor auf die kleinste Benennung, die in einen von diesen beyden vorhanden war. Da es aber auch sehr leichte ist, die Division in Brüchen zu verrichten, wenn nur der Divisor eine ganze Zahl ist; so ist es eben nicht allemal nöthig, den Divisor in kleinere Einheiten, als darinne vorkommen, zu verwandeln.

Ist nun der Divisor blos durch einerley Einheit (wie im vor. Ex.) ausgedrückt, oder ist er nach verschiedenen, von einander abhängenden Einheiten, als durch Thaler, Groschen, angegeben, und auf die kleinste die darunter vorkommt, gebracht; so hat man den Dividendum, der durch verschiedene sich auf einander beziehende Einheiten, wo bey der kleinsten auch Brüche seyn können, beschrieben ist, auf eben die Benennung zu bringen, die der Divisor führt. Käme aber im Divisor, ob er gleich nur aus einer Menge von einerley Einheiten bestünde, ein Bruch vor, so müßten, nachdem der Dividendus auf des Divisors Benennung gebracht würde, beyde zu Brüchen von einerley Nenner gemacht werden. Diese izt beschriebene Art ist hauptsächlich da zu gebrauchen, wo der Divisor nur blos aus einer einzigen Einheit von gewisser Benennung, z. E. aus 1 Thl. besteht. Denn bringt man in diesem Falle den Dividendum auf eben die Benennung die der Divisor hat, so hat man den gesuchten Quotienten gleich, indem der resolvirte Dividendus es selbsten ist, so bald man ihn, als eine unbenannte Zahl ansieht.

Exempel.

Es sollen 124 Fl. 15 Stüb. 12 Pf. Holländisch, durch 1 Fl. dividirt werden. Nachstehende Rechnung wird es thun.

124 Fl.

20 16

124 Fl. 15 St. 12 Pf.

12 : 16 = $\frac{3}{4}$ Stüb. und
15 $\frac{3}{4}$ Stüb. = $\frac{63}{4}$ Stüb. =
$\frac{63}{80}$ Fl. und also
124 $\frac{63}{80}$ Fl. der Dividendus.

Also:

Divisor	Dividend.	
1 Fl.	124 $\frac{63}{80}$ Fl.	124 $\frac{63}{80}$ Quot.

Es sind 4 Pf. 13 ℥, 15 Engl. 24 Aß Holländisches Gewicht, durch 1 Unze zu dividiren, wie folget:

16 20 32

4 Pf. 14 ℥, 15 Engl. 24 Aß
16 24 : 32 = $\frac{3}{4}$ Engl.; dazu
15 · add giebt

64 ℥ 15 $\frac{3}{4}$ Engl. = $\frac{63}{4}$ Eng.;
13 · add. $\frac{63}{4}$: 20 = $\frac{63}{80}$ ℥, dazu
77 · add. giebt

77 ℥ 77 $\frac{63}{80}$ ℥ zum Divid.

Nun ist der Divisor 1 ℥; Also 77 $\frac{63}{80}$: 1 = 77 $\frac{63}{80}$ = den gesuchten Quotienten.

Es ist 89 Thl. 8 Gr. 5 Pf. durch 8 Thl. zu dividiren.

Nachstehende Rechnung wird es thun.

89 Thl.

89 Thl. 8 Gr. 5 Pf.

$8\frac{5}{12}$ Gr. = $\frac{101}{12}$ Gr. = $\frac{101}{288}$ Thl. Also der Dividendus.

8 Thl. | 89 $\frac{101}{288}$ Thl. | 11 $\frac{389}{2304}$ Quot.
88

1 $\frac{101}{288}$ = ~~$\frac{349}{288}$~~ : dividirt durch 8, giebt $\frac{389}{2304}$.

Nach dem Reichsgelde ausgedruckte Summe, 4027 Fl. 9 Batz. 3 ½ Kr. soll durch 7 Fl. 3 Batzen dividirt werden.

Divisor	Dividend.	
15	15	4
7 Fl. 3 Batz.	4027 Fl.	9 Batz. 3 ½ Kr.
15	15	$\frac{7}{2}$ Kr. : 4 =
108 Batz.	20144	$\frac{7}{8}$ Batzen.
	4027	
	60414 Batz.	

Also:

Divisor	Dividend.	Quotient.
108	60414 $\frac{7}{8}$	559 $\frac{343}{864}$.
	540	
	641	
	540	
	1014	
	972	
	42 $\frac{7}{8}$ = $\frac{343}{8}$.	

Es ist 96 Pf. 3 Loth, durch 9 $\frac{1}{2}$ Pf. zu dividiren

96 Pf. 3 Loth

3 Loth = $\frac{3}{32}$ Pf.
96 $\frac{3}{32}$ Pf. = 192 $\frac{3}{16}$ halbe Pf. =

Divisor 19 halbe Pf.	dem Divid. an 192 $\frac{3}{16}$ halbe Pf 19	1 $\frac{35}{274}$ = 1 $\frac{5}{24}$ Quot.

2 $\frac{3}{16}$ = $\frac{35}{16}$.

§. XXI.

Wenn der Dividendus durch eine Menge von Einheiten, die nur einerley Benennung, als z. E. blos Thl. führt, beschrieben, oder aber auch durch verschiedene Einheiten unter denen keine so kleinste Benennung vorkommt, als der Divisor enthält, ausgedrückt ist, oder überhaupt der itzige Fall, der umgekehrte des vorigen §, ist; so kann man den Divisor auf die kleinste Benennung, die im Dividendo vorkommt, bringen, und so dann die Division verrichten. Wäre z. E. der Dividendus durch Thaler ausgedruckt, und der Divisor durch Thaler, Groschen, Pfennige; so müßte man also den Divisor in Thaler verwandeln. Aber freylich würde so der Divisor eine gebrochene Zahl werden, und also einen Bruch in eine ganze Zahl zu dividiren haben. Doch dieses kann, wie aus der Lehre von Brüchen bekannt ist, fast eben so leich-

te geschehen, als wenn der Divisor eine ganze Zahl und der Dividendus ein Bruch, wie im vorigen §. wäre.

Wem nun die Art des vorigen §. gefällt, der kann sie auch hier anbringen; und wer so einen Divisor und Dividendum vor sich hat, daß sich der Dividendus im Divisor mit geringerer Mühe dividiren läßt, der kann sich hierzu leicht, durch die Lehre von Brüchen Vortheile verschaffen. Denn, da ein Bruch nichts anders ist, als der Quotiente der heraus kommt, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt, und daher der aus einer Division entstehende Quotiente durch einen Bruch ausgedrückt werden kann, dessen Zähler der Dividendus und der Nenner der Divisor ist; (59; 60; 61;) so erhält man, wenn man den Divisor durch den Dividendum dividirt, und den Quotienten als einen Bruch ausdrückt, einen Bruch, dessen Zähler der Divisor und der Nenner der Dividendus ist; und also, wenn man diesen Bruch umkehrt, nämlich den Nenner zum Zähler und dem Zähler zum Nenner macht, wird man einen Bruch erhalten, dessen Zähler der Dividendus und der Nenner der Divisor ist: Folglich ist dieser Bruch der wahre Quotiente, der herauskommt, wenn man den Dividendum durch den Divisor selbst dividirt. Wenn ich z. E. 6 durch 18 dividiren sollte, so dividire ich 18 durch 6, denke mir den Quotienten 3, in Gestalt eines Bruchs $\frac{3}{1}$ und kehre diesen Bruch um, so erhalte

ich $\frac{1}{3}$ = dem Quotienten 6 : 18. Wir wollen einige Exempel hersetzen, in welchen der Dividendus, wie gehörig, die Eigenschaft des Divisors vorigen §. hat.

Man soll 1 Fl. holländisch durch 2 Fl. 12 Stüb. 4 Pf. holländisch dividiren, wie folget:

$$\underbrace{2\ \text{Fl.}}_{20}\ \ \underbrace{12\ \text{St.}}_{16}\ \ 4\ \text{Pf.}$$

$12\frac{4}{16}$ St. = $12\frac{1}{4}$ St. = $\frac{49}{4}$ St. = $\frac{49}{80}$ Fl.; Also der

Divisor $2\frac{49}{80}$ Fl. = $\frac{209}{80}$ Fl.; und daher $\frac{209}{80}$: 1 = $\frac{209}{80}$; mithin der wahre Quotiente = $\frac{80}{209}$ = 1 Fl.: (2 Fl. 12 Stüber, 4 Pf.) = 1 Fl. : $2\frac{49}{80}$ Fl.

Man hat 1 Thl. durch 5 Thl. 8 Gr. 4 Pf. zu theilen. Folgende Rechnung wird es thun:

5 Thl. 8 Gr. 4 Pf.

$8\frac{1}{3}$ Gr. = $\frac{25}{3}$ Gr. = $\frac{25}{72}$ Thl.;

Also

$5\frac{25}{72}$ Thl. : 1 Thl. = $\frac{385}{72}$ Thl. : 1 Thl. = $\frac{385}{72}$; und folglich der wahre Quotiente, oder 1 Thl. : (5 Thl. 8 Gr. 4 Pf.) = $\frac{72}{385}$. Es ist 5 Thl. 1 Mrk. Lübisch durch 8 Thl. 2 Mrk. 7 ß. 8 Pf. zu dividiren: Wie groß ist der Quotiente? Nach folgender Rechnung wird man es finden. Da aber 3 Mrk. Lübisch = 1 Thl.

1 „ „ = 16 ß. (od. Schill.) Lübisch,

1 ß.

1 ß. Lübisch = 12 Pfenn. Lübisch; so ist der Dividendus = 16 Mark, und der Divisor = 26 $\frac{23}{48}$ Mark; wie man nach §. VII. und VIII. leicht findet. Also

26 $\frac{23}{48}$: 16 = 1 $\frac{503}{768}$ = $\frac{1271}{768}$; folglich der wahre Quotient oder (5 Thl. 1 Mrk.) : (8 Thl. 2 Mrk. 7 ß. 8 Pf.) = $\frac{768}{1271}$.

Multiplication

benannter Zahlen durch Brüche.

§. XXII.

Eine benannte Zahl durch einen Bruch zu multipliciren.

Auflös. Es ist aus der Lehre von Brüchen bekannt, daß eine Zahl mit einem Bruch multiplicirt wird, wenn man den Zähler desselben mit dieser Zahl multiplicirt, und was heraus kommt durch den Nenner dividirt: (64) Also sieht man leicht ein, daß man alle Theile der benannten Zahl mit dem Zähler (nach §. XIV.) zu multipliciren, und das dadurch heraus gebrachte Product mit dem Nenner (nach §. XVIII.) zu dividiren hat. Dieser Quotiente ist das verlangte Product.

Exempel.

Man soll die Zeit eines Jahrs, welche auf 365 Tage, 5 Stunden, 48 Min. 57 Sec. 12 Tertien gerechnet wird, mit $\frac{1}{12}$ multipliciren.

Da mit $\frac{1}{12}$ multipliciren nichts anders ist, als mit 12 dividiren (61), so muß man dies hier thun. Um aber leicht in Gedanken zu dividiren und nicht viel Schreibens zu haben, so kann man 12 in Factores 3 und 4 zerlegen, und durch diese dividiren. Man sieht aber leicht, wo und wie man dergleichen Vortheile anbringen kann. Man kann sie nicht alleine beym Dividiren, sondern auch beym Multipliciren, gebrauchen. Unser Exempel berechnet sich wie folget:

3	365 Tage,	5 Stund.	48 Min.	57 Sec.	12 Tert.
4	121 ·	17 ·	56 ·	19 ·	~~12~~ 4 ·
	30 Tage,	10 Stund.	29 Min.	4 Sec.	46 Tert.

Nämlich es ist erstlich 365 Tage, 5 St. ꝛc. durch 3 dividirt worden, und der herausgebrachte Quotient 121 Tage, 17 Stunden ꝛc. wieder durch 4, und der nun heraus gekommene Quotient 30 Tage, 10 Stunden ꝛc. ist das Verlangte. Denn

$$\frac{\text{365 Tage, 5 St. ꝛc.}}{12} = \frac{\text{365 Tage, 5 St. ꝛc.}}{3 \cdot 4} =$$

$$\frac{\text{365 T. 5 St. ꝛc.}}{3} \times \frac{1}{4} = \text{121 Tage, 17 St. ꝛc.}$$

$$\times \frac{1}{4} = \frac{\text{121 Tage, 17 St. ꝛc.}}{4} = \text{30 Tage, 10 St. ꝛc.}$$

Wie viel beträgt $\frac{2}{3}$ von 5 Thl. 8 Gr. 4 Pf.? Dies giebt folgende Rechnung:

5 Thl.

5 Thl. 8 Gr. 4 Pf.
2 mult.

divid. mit 3 | 10 Thl. 16 Gr. 8 Pf.
| 3 Thl. 13 Gr. $6\frac{2}{3}$ Pf.

Am Engl. Gelde soll diese Summe 574 Pf. Sterl. 15 ß. mit $5\frac{3}{4}$ multiplicirt werden. Nach der gegebenen Regel muß man $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$ machen, und, wie gelehrt, verfahren.

Also

20

574 Pf. Sterl. 15 ß.
23

1722 45
1148 30
17 20 | 345 ß. | 17 Pf. Sterl.
| 340 |

Div. | 13219 Pf. Sterl., 5 ß.
4 | 3304 Pf. Sterling, $16\frac{1}{4}$ ß. oder (weil 1 ß. = 12 Pf. daher $\frac{1}{4}$ ß. = 3 Pfen.) = 3304 Pf. Sterl. 16 ß. 3 Pf. = (574 Pf. Sterl. 15 ß.) $\times 5\frac{3}{4}$.

Dieses und alle solche Exempel, die nämlich zum Multiplicator eine ganze Zahl nebst einem Bruche haben, kann man auch so berechnen. Nämlich man multiplicirt die ganze Zahl des Multiplicators in die benannte Zahl, und, in eben diese

auch den Bruch (nach §. XXII.) beyde Producte addirt man zusammen: die erhaltene Summe ist das Verlangte.

Wir wollen beym lezten Exempel stehen bleiben.

A) 574 Pf. Sterl.	15 ß.		
	5 mult.		
2873 -	15 -		Nun die Größe bey A mit 3 multiplic. giebt
1724 -	5 -		dividirt mit 4, giebt
431 -	1 ß. 3 Pfen.	(= $\frac{3}{4}$ A)	
2873 -	15 -	—	add. giebt
3304 Pf. Sterl.	16 ß.	3 Pf.	wie vorhin.

Eben dieses und ähnliche Exempel können auch auf folgende Art berechnet werden. Man betrachte nämlich, daß

(574 Pf. Sterl. 15 ß.) $\times 5\frac{3}{4}$ = (574 Pf. Sterl. 15 ß.) . $(2 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})$ = (574 Pf. Sterl. 15 ß.) . 2 + (574 Pf. Sterl. 15 ß.) . 3 + (574 Pf. Sterl. 15 ß.) . $\frac{1}{2}$ + (574 Pf. Sterl. 15 ß.) . $\frac{1}{4}$, ist; Also darf man nun 574 Pf. Sterl. 15 ß. erstlich mit 2, dann mit 3, ferner mit $\frac{1}{2}$ und endlich mit $\frac{1}{4}$, multipliciren, und alle diese Producte zusammen addiren. Die herausgebrachte Summe wird das Verlangte geben.

Also

Also wird nun die Rechnung so sehen:

574 Pf. Sterl.	15 ß.	0 Pf.	multipl.	
1149 =	10 =		mit 2	
1724 =	5 =		mit 3	
287 =	7 =	6 Pf.	mit $\frac{1}{2}$	
143 =	13 =	9 =	mit $\frac{1}{4}$	
3304 =	16 =	3 =	wie gehörig.	

Die Zerlegung des Multiplicators in Theile, wie hier geschehen ist, bringt bey der Multiplication, besonders wenn der Multiplicator ein Bruch ist, großen Vortheil, so wie die Zerlegung des Divisors in Factore, auch bey der Division dergleichen thut. Fast die ganze welsche Practic ist in der Zertheilung des Multiplicators, wenn besonders derselbe eine gebrochene Zahl ist, enthalten. Wer aber die Gründe der Rechnungen versteht, und viel rechnet, erfindet sich dergleichen Vortheile selbst, ohne daß er es zu wissen braucht, daß die Erfindung solcher Vortheile in der welschen, oder italiänischen, oder englischen, oder französischen, oder deutschen, oder pommerschen, oder schwedischen, oder hebräischen rc. Practic abgehandelt wird. Ueberdies dürfen Anfänger nur von Clausbergs demonstrativischer Rechenkunst lesen. Sie werden da genung Rechnungsvortheile sammt ihren Gründen deutlich gezeigt finden. Schon treffen sie dergleichen in der mehrmaln angeführten Einleitung zur Rechenkunst rc. an. —

und andern ähnlichen an.

Um aber hier noch einige Vortheile zu zeigen, so wollen wir beym leztern Exempel stehen bleiben, wo man 574 Pf Sterl. und 15 ß. mit $5\frac{3}{4}$ multipliciren soll. Da nun hier der Multiplicator $5\frac{3}{4}$ ist, und $5\frac{3}{4} = 6 - \frac{1}{4}$, sich aber mit $\frac{1}{4}$ besser multiplicirt als mit $\frac{3}{4}$, so brauche man statt $5\frac{3}{4}$ die $6 - \frac{1}{4}$. Es ist nämlich

(574 Pf. Sterl. 15 ß.) . $5\frac{3}{4}$ =
(574 Pf. Sterl. 15 ß.) . $(6 - \frac{1}{4})$ =
(574 Pf. Sterl. 15 ß.) . $(2 . 3 - \frac{1}{4})$ =
(574 Pf. Sterl. 15 ß.) . 2 . 3 — (574 Pf. Sterl. 15 ß.) . $\frac{1}{4}$

Also muß man hier 574 Pf. Sterl. 15 ß. mit 2, und das heraus gekommene Product mit 3 multipliciren. Von diesem nun erhaltenen Producte aber, das, so herauskommt, wenn man 574 Pf. Sterl. 15 ß. mit $\frac{1}{4}$ multiplicirt, abziehen. Die Rechnung sieht so aus:

```
          20        12
574 Pf. Sterl. 15 ß. 0 Pf.
--------------------------
1149 Pf. Sterl. 10 ß.
--------------------------
3448   :   10   :
 143   :   13   :  9 Pf.
--------------------------
3304 Pf. Sterl. 16 ß. 3 Pf. wie gehörig.
```

Zum Beschluß dieser Multiplication wollen wir noch 13 Pf. 14 Loth, 3 Qu. durch $\frac{17}{24}$ multipliciren. Da nun $\frac{17}{24} = \frac{12}{24} + \frac{5}{24} = \frac{1}{2} + \frac{4}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ und also

(13 Pf. 14 Loth, 3 Qu.) $\times \frac{17}{24}$ = (13 Pf. 14 Loth, 3 Qu.) $\cdot \frac{1}{2}$ + (13 Pf. 14 Loth, 3 Qu.) $\cdot \frac{1}{2 \cdot 3}$ + (13 Pf. 14 Loth, 3 Qu.) $\cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ ist; so sieht man leicht, daß man zu multipliciren hat

Pf.	Loth	Qu.	
13	14	3	mit $\frac{1}{2}$; giebt
6	23	$1\frac{1}{2}$	; dieses mit $\frac{1}{3}$, giebt
2	7	$3\frac{1}{6}$	; dieses mit $\frac{1}{4}$, giebt
0	17	$3\frac{19}{24}$	; Und diese 3 Producte zusammen addirt, geben
9	17	$\frac{11}{24}$	das Verlangte.

Division

benannter Zahlen durch Brüche.

§. XXIII.

Eine benannte Zahl durch einen Bruch oder durch einen Bruch nebst einer ganzen Zahl, zu dividiren.

Aufl. Ist der Divisor nur blos ein Bruch, so kehre man ihn um und multiplicire (78; §. XXII.) Besteht der Divisor aus einer ganzen Zahl und einem Bruche, so verfährt man eben so, so bald

der

der Divisor in einem einzigen Bruch verwandelt ist (nach 60 und 61. und dessen Erl.)

Dergleichen in XXII. §. angezeigten Vortheile sind auch hier zu gebrauchen.

Exempel.

Es sey 9 Pf. 20 Loth, 2 $\frac{1}{2}$ Qu. durch $\frac{2}{3}$ zu dividiren, d. i. durch $\frac{3}{2}$ = 1 $\frac{1}{2}$ zu multipliciren.

Die Rechnung ist folgende:

2) 9 Pf. 20 Loth, 2 $\frac{1}{2}$ Qu.
4 = 26 = 1 $\frac{1}{4}$ =

14 Pf. 14 Loth, 3 $\frac{3}{4}$ Qu.

Denn (9 Pf. 20 Loth, 2 $\frac{1}{2}$ Qu.) : $\frac{2}{3}$ = (9 Pf. 20 Loth, 2 $\frac{1}{2}$ Qu.) . $\frac{3}{2}$ = (9 Pf. 20 Loth, 2 $\frac{1}{2}$ Qu.) . (1 + $\frac{1}{2}$) = (9 Pf. 20 Loth, 2 $\frac{1}{2}$ Qu.) + $\left(\frac{9 \text{ Pf. } 20 \text{ Loth, } 2\frac{1}{2} \text{ Qu.}}{2}\right)$

Da die Sache an und für sich leichte ist, und auch genau mit der Multiplication zusammen hängt; so wird es nicht nöthig seyn mehrere Exempel zu geben. Wir schlüßen hiermit die vier Rechnungsarten in benannten Zahlen, die wir meist nach der §. I. angeführten Einleitung zur Rechenkunst vorgetragen haben, und gehen wieder ins Buch.

§. 95.

Z. E. bey den Grundsätzen (88).

Wenn man nach dem Grundsatze: Das Grössere zum Gleichen addirt, giebt mehr als das Kleinere, zu

$$-4=-4$$

$$+4>+2$$ addirt, so kommt

$$0>-2,$$

welches, dem ersten Ansehen nach, nicht wahr zu seyn scheinet. Aber diese Unwahrscheinlichkeit verschwindet gleich, so bald man bedenket, daß, nachdem man zu -4 die $+2$ sezte, die -2 heraus kam, (93) die eine verneinte Größe, und also weniger als nichts, d. i. kleiner als 0, ist.

Wenn man eine verneinte Größe weniger als nichts ansieht, so ist eine größere verneinte Größe kleiner als eine kleinere verneinte: denn der grössern verneinten fehlt mehr, um nichts von ihren Entgegengesezten zu werden, als der kleinern zu dem Nichts von der ihr entgegengesezten fehlt.

Da nun $0>-1$; und $+1>0$; so ist $-1<+1$; und aus eben der Ursache z. E. $+3>-3$; $+4>-4$; $+5>-5$ ꝛc. oder $+3>-4>-5$ ꝛc. d. i. jede positive Größe ist grösser als jede negative; vorausgesezt, daß jede verneinte Größe weniger als nichts ist.

Aber Anfänger können doch wohl hierbey zweifeln, ob denn auch z. E. $-3+3=0$ wäre, da doch (nach 95) $+3>-3$ ist. Diesen Zweifel können sie sich aber gleich benehmen, wenn sie beden-

bedenken, daß wenn sie von drey Einheiten, drey derselben wegnehmen, o übrig behalten. Nun enthält aber — 3 sowohl, als auch + 3, ohne Rücksicht auf ihre Zeichen, drey Einheiten; und da — 3 verneint ist, so muß man sie (nach 92) von + 3 abziehen, d. i. von + 3, drey Einheiten wegnehmen, da denn also nichts anders als o heraus kommen kann. Was hier von + 3 und — 3 gesagt ist, gilt auch von allen andern entgegengesezten Größen.

Wenn man nach dem Grundsaß: Gleiches zu Ungleichen addirt giebt bey dem Größern mehr als bey dem kleinern;

$$\begin{array}{l} -4 > -2 \text{ sezt, und dazu} \\ \underline{+4 = +4} \text{ addirt, so kommt} \\ \quad 0 > +2 \end{array}$$

heraus, welches ungereimt ist. Aber dieses Ungereimte verschwindet, so bald man $-4 < -2$ sezt: denn alsdann kommt $0 < +2$, wie gehörig.

§. 97.

Eine positive Größe, die zu Anfange gesezt wird, schreibt man ohne das Zeichen +; ob man ihr gleich, wenn sie negative wäre, das Zeichen — vorsezte. Daher muß man in dem Ausdruck 12 — (15 — 19) die 12 und 15 als bejaht ansehen. Aber 12 — (15 — 19) bedeutet, daß man von der positiven 12, abziehen soll + 15 weniger 19; Zöge man nun von der + 12 die + 15 ab, so

so hätte man 19 zu viel abgezogen: denn man soll nur 15 weniger 19 abziehen; daher muß man zu der Differenz, die man erhält, wenn man von der 12 die 15 abzieht, 19 addiren.

Man wird nun leicht einsehen, was der Ausdruck

$$36 - (12 + 4)$$

sagen will. Man soll nämlich von + 36, die + 12 und zugleich auch die + 4 abziehen. Zöge man daher von der + 36 nur die + 12 ab, so hätte man, weil man 12 und zugleich 4 von 36 abziehen soll, 4 zu wenig abgezogen, und daher + 4 noch abzuziehen: Also ist

$$36 - (12 + 4) = 36 - 12 - 4 = 20 = 36 - 16.$$

§. 98.

Wenn man von einer Größe, (z. E. 7.) eine Größe (z. B. 4) abziehen soll, so heißt dies nichts anders, als man soll zu der Größe, von der man abziehen soll, (hier zu der 7) das Entgegengesezte der Größe, (hier im Ex. das Entg. der 4) die man abzuziehen hat, addiren. Wenn man nun also im Exempel hier zu 7 die der 4 Entgegengesezte addirt, oder, welches einerley ist, von 7 die 4 subtrahire, so können beyde, die 7 sowohl als die 4 positiv oder negativ, oder die eine bejaht und die andere verneint, seyn.

Ist nun 7 und 4 positiv, so ist

(+ 7)

$$(+7)-(+4)=+7-4=7-4;$$

woran Niemand zweifelt. Ist aber 7 und 4 negativ; so ist.

$$-7-(-4)=-7+4=-3;$$

Denn bedeutet + 7 Thl. und + 4 Thl. Vermögen, so zeigt — 7 Thl. und — 4 Thl. Schulden an. Nimmt mir nun jemand von einer 7 thalerichen Schuld 4 Thaler Schuld weg; so ist es eben so viel als wenn mein Vermögen um 4 Thaler vermehrt, oder meine 7 thaleriche Schuld bis auf 3 Thl. vermindert, worden wäre.

Es sey 7 positiv und 4 negativ; so ist

$$7-(-4)=7+4=11;$$

denn wer mir 4 Thl. Schuld wegnimmt oder entzieht, vermehrt mein Vermögen um 4 Thl.

Wäre endlich 7 negativ und 4 positiv; so ist

$$-7-(+4)=-7+(-4)=-11;$$

Denn wem 4 Thaler würkliches Vermögen entzogen wird, der hat 4 Thaler Verlust. Er hat aber schon 7 Thl. Verlust gehabt; Also hat er nunmehr 11 Thl. Verlust, d. i. — 11 Thl. Gewinnst (91).

§. 101.

Bey Rechnungen mit entgegengesezten Größen ist es nöthig, die Einheit entweder durchaus positiv

sitiv oder negativ anzunehmen: denn wollte man sie bald positiv, bald negativ, annehmen, so würde dies, eine unnöthige Weitläuftigkeit und eine Menge ganz entbehrlicher Regeln, verursachen. Aber man hat die Einheit durchaus positiv angenommen, und stellt sich dabey vor, daß auch die negativen Zahlen aus der positiven Einheit entsprungen, ob sie gleich Mengen des Entgegengesezten dieser positiven Einheit sind. Der Ursprung negativer Zahlen aus der positiven Einheit aber, ist leicht einzusehen. Man betrachte nur, daß eine Menge Einheiten eine Zahl ist, und, daß sie also entsteht, indem die Einheit zu so einer großen Menge anwächst: daher entsteht z. E. + 3, indem die positive Einheit zu einer solchen Menge anwächst, worinne sie dreymal enthalten ist; Aber — 3 entspringt, wenn die positive Einheit nach und nach kleiner und zulezt = 0 wird, alsdenn auf die entgegengesezte Art zu so einer Menge anwächst, die das Entgegengesezte der positiven Einheit enthält. Man sehe hiervon **Karstens Beyträge zur Aufnahme der theoret. Mathem.** 8v. 1778. von S. 49 bis S. 78.

§. 102.

Z. E. soll 7 Thl. mit — 3 multiplicirt werden, so ist es eben so viel, als wenn jemanden 7 Thl. dreymal abgezogen worden, und, ihm ein Verlust an 21 Thl. verursacht wird. Ist der Verlust in Absicht des Gewinnstes negativ; so ist

 ein

ein negativer Gewinn ein Verlust, und also 7 Thl. × — 3 = — 21 Thl. Gewinnst.

§. 103.

Z. E. Sieben Thaler Verlust mit + 3 multiplicirt, giebt einen 21 Thalerichen Verlust; folglich — 7 Thl. × + 3 = — 21 Thl. Gewinnst.

§. 105.

Z. E. Wem ein Verlust an 7 Thl. dreymal entzogen wird, dem wird ein Gewinnst von 21 Thalern verursachet: Also ist — 7 Thl. × — 3 = 21 Thl. Gewinnst.

§. 107.

Wenn die Einheit verneint angenommen wird, so giebt (102) ein bejahtes Product: denn das Product enthält den verneinten Factor so vielmal, als der bejahte die verneint angenommene Einheit. Nun steckt aber in dem bejahten Factor nicht die verneint angenommene Einheit, sondern ihr Gegentheil: Also steckt auch das Gegentheil des verneinten Factors im Producte: Oder, das Product ist bejahend.

Eben so ist bey negativ angenommener Einheit, das Product in (103) bejaht. Denn die verneinte Einheit steckt im verneinten Factor so vielmal, als der bejahte im Producte; Sie ist aber selbst, und nicht ihr Gegentheil, im verneinten Factor vorhanden: Mithin auch der bejahte selbst im Producte: Folglich ists bejaht.

Das

Das Product in (105) ist bey verneint angenommener Einheit, verneint. Denn die negative Einheit steckt in dem einen verneinten Factor so vielmal als der andre verneinte im Producte: Folglich ists verneint. Das Product in (106) endlich ist, nach angenommener negativischer Einheit, verneint. Denn der eine positive Factor enthält das Gegentheil der Einheit so vielmal, als das Product das Entgegengesezte des andern positiven Factors enthält: Folglich muß es verneint seyn.

So fallen die Producte aus, wenn die Einheit negativ angenommen wird. Sie ist aber durchaus vor positiv angenommen worden: daher hat man nicht auf die Producte, die aus der negativ angenommenen Einheit entstehen, zu sehen.

§. 108.

Wenn beyde Factores entweder zugleich positiv oder negativ, d. i. beyde mit + oder — bezeichnet sind; so erhält man allezeit ein positives Product; wie in (105) und (106) ist erwiesen worden. Ist aber einer von beyden Factorn positiv und der andre negativ, d. i. hat der eine + und der andre — vor sich; so geben sie (nach 102 und 103) ein negatives Product.

§. 110 und 111.

Exempel.

$\frac{+12}{-3} = -4$: denn $-3 \times -4 = +12$ (16; 108;)

$\frac{-12}{+3} = -4$; denn $+3 \times -4 = -12$ (16; 108)

$\frac{-12}{-3} = +4$; Weil $-3 \times +4 = -12$ (16; 108) ist.

§. 113.

Exempel.

Es soll $(24 - 54 + 92 - 20) = 42$ durch $(8 - 2) = 6$ dividirt werden.

Die Rechnung ist, wie folget:

Divisor	Dividendus	Quotient
8 — 2	24 — 54 + 92 — 20	3 — 6 + 10
	24 — 6 = 3 . 8 — 3 . 2	abgezogen
	+	

—48 + 92 — 20
—48 + 12 = 8 . — 6 — 2 . — 6 subt.
+ —

+ 80 — 20
+ 80 — 20 = 8 . 10 — 2 . 10 subt.
— +

0

Man dividirt nämlich erst 8 in 24, so erhält man im Quotienten 3; macht dann das Product 3 . 8 — 3 . 2 = 24 — 6, welches von 24 — 54 subtrahirt — 48 zurücke läßt; hierzu nun sezt man

man das übrige des Dividendi, nämlich $+ 92 - 20$, und dividirt 8 in $- 48$, da dann $- 6$ im Quotienten kommt; man macht ferner das Product

$$-6 \cdot 8 - 2 \cdot -6 = -48 + 12,$$

ziehet es von $- 48 + 92$ ab, und erhält zum Rest $+ 80 - 20$. Endlich dividirt man 8 in 80 und bekommt in Quotienten 10; macht das Product $8 \cdot 10 - 2 \cdot 10 = 80 - 20$ und zieht es von $80 - 20$ ab.

Wenn man hier statt der Zahlen Buchstaben sezt, so hat man ein Exempel der Division mit Buchstaben, wovon wir im II. Capitel, zu welchen wir izt gleich kommen, mehreres sagen werden.

Erläuterungen der Kästnerischen Arithmetik

II. Capitel.

Die Buchstabenrechnung.

§. 1.

In der Buchstabenrechnung deutet man alle Zahlen, statt daß sie im I. Capitel durch Ziffern ausgedruckt worden, durch Buchstaben an.

Jeder Buchstabe kann alle nur mögliche Zahlen und also jede Größe bedeuten. So kann a die 3, 4, 5, u. s. w. oder Pfunde, Lothe, Fuß, Lachter, Kraft, Bewegung, Druck, Centner, Thaler, Ellen &c. kurz, jede Zahl oder Größe anzeigen; doch dergestalt, daß, um Verwirrung zu vermeiden, bey einer Aufgabe oder einem Lehrsatze ein Buchstabe nur einerley Sache andeutet. Es dürfen sich daher die ersten Anfänger gar keinen Anstoß machen, wenn sie in der Rechnung mit Buchstaben Ausdrücke finden, bey denen sie sehen, daß wohl etwas und was gemacht werden soll, aber doch nichts bestimmtes, wie beym Zahlen durch Ziffern ausgedruckt, vor sich haben. Bey dem Ausdruck $a + b$ z. E. siehet man, daß a und b addirt werden soll; und ob man gleich nicht weiß, wie

wie viel a + b zusammen macht, so darf dies um so viel weniger befremden, da man für a und b, jede beliebige Zahlen setzen kann. Ja es kann a selbst schon eine Summe zwoer oder mehrerer Zahlen, wie auch eine Differenz, Product, Quotiente seyn: und dies findet auch bey b statt. Und so kann man durch a + b alle mögliche Summen ausdrücken, eben so wie durch c + d im Buche. Ist z. E. $a = 25$, $b = 17$; so ist $a + b = 25 + 17 = 42$; Wäre $a = 50$, $b = 36$; so würde $a + b = 50 + 36 = 86$ seyn; Ist aber $a = 100 - 25$ und $b = 130 \times 2$; so ist $a + b = (100 - 25) + 130 \times 2 = 75 + 260 =$ ~~1010~~. 335
Man wird nun leicht begreifen, wie a b alle mögliche Producte, e — f alle mögliche Differenzen, g : h oder $\frac{g}{h}$ alle mögliche Quotienten bedeuten kann. Dies alles kann auch durch andere als die hier gebrauchten Buchstaben angezeigt werden. —

Die Bezeichnung der Größen oder Zahlen durch Buchstaben bringt in der Mathematik durchgehends den großen Vortheil, daß dadurch der Vortrag abgekürzt und das Nachdenken erleichtert wird, auch die Sätze in ihrer größten Allgemeinheit dargethan und gefunden werden können. —

Die Buchstabenrechnung ist eigentlich noch keine Algebra: Diese lehrt mathematische Aufgaben durch Gleichungen auflösen; jene aber ist dazu nur die nächste Vorbereitung.

§. 3.

Eine Größe die aus verschiedenen mit + oder — zusammengehängten Gliedern oder Theilen besteht, heißt eine **zusammengesezte Größe**: und der Ausdruck, (wie 7 a + 4 b — 3 c — 4 d) in dem verschiedene Buchstaben mit verschiedenen Zeichen zusammengehängt, befindlich sind, zeigt eine zusammengesezte Größe an. Dergleichen Ausdrücke in Zahlen sind schon in der Lehre von entgegengesezten Größen, ja schon einer im 30. §. des I. Cap. da gewesen. Demnach kann die Aufgabe im Buche auch so heißen: **Zusammengesezte Größen zu addiren und zu subtrahiren.**

Ehe wir zur Erläuterung der Auflösung dieser Aufgabe schreiten, müssen wir anmerken, daß man diejenigen Größen, die durch einerley Buchstaben ausgedruckt sind, **gleichartige Größen**, die übrigen aber **ungleichartige**, nennen kann. Sind sie aber als Theile zusammengesezter Größen vorhanden, so mögen jene **gleichartige** und diese **ungleichartige Theile**, heißen. So sind 16 X und 35 X, für sich gleichartige Größen, aber als Theile zusammengesezter Größen gleichartige Theile, so wie 16 X und 11 y für sich ungleichartige Größen, und als Theile zusammengesezter Grössen, ungleichartige Theile sind. Um nun zusammengesezte Größen zu addiren, so schreibt man die gleichartigen Theile untereinander, addirt sie nach I. 96. schreibt ihre Summe mit dem zugehörigen Zeichen, das sich eben durch die Addition nach I.

96. ergiebt, darunter, und sezt die ungleichartigen Theile ungeändert in die Summe hin.

I. Exempel.

$$\begin{array}{l} 7a + 4b - 3c - 4d = A \\ 2a - 5b - 4c + 6d = B \\ \hline 9a - b - 7c + 2d = \text{Summe von } A + B \end{array}$$

Nämlich 7 positive a und 2 positive a geben 9 bejahte a; aber 4 positive b und 5 negative b, geben ein negatives b; Ferner geben 3 negative c und 4 negative c, 7 verneinde c; und 4 negative d und 6 positive d, 2 positive d.

II. Exempel.

$$\begin{array}{l} \quad bz - 5u + 6ab - 4c + 6ef \\ \quad 9bz + 5u - 3ab \quad + 2ef - gh + l \\ \hline \text{Sum.} = 10bz + 3ab - 4c + 8ef - gh + l \end{array}$$

III. Exempel.

$$\begin{array}{l} \frac{ay}{c} + \frac{c}{f} - 6k + \frac{n}{m} - 7g \\ \frac{a}{c} - \frac{l}{p} + 7k + q \\ \hline \text{Sum.} = \frac{ay + a}{c} + \frac{cp - lf}{pf} + k + \frac{n + qm}{m} - 7g. \end{array}$$

Hier in diesem IIIten Exempel kommen Brüche von gleichen und ungleichen Nennern durch Buchstaben ausgedruckt vor. Man hat dabey

nicht anders als nach der Lehre von Brüchen verfahren; denn um den Bruch $\frac{ay}{c}$ und $\frac{a}{c}$ zu addiren, darf man nur, weil sie gleiche Nenner haben, die Zähler addiren und man erhält, wie in der Summe dieses III. Exempels $\frac{ay + a}{c}$; Will man aber $\frac{c}{f}$ und $-\frac{l}{p}$ addiren, so muß man sie nach I, 72 erst unter einerley Benennung bringen. Es ist nämlich $\frac{c}{f} + \left(-\frac{l}{p}\right) = \frac{c}{f} - \frac{l}{p} = \frac{c \,.\, p}{f \,.\, p} - \frac{l \,.\, f}{p \,.\, f} = \frac{cp - lf}{pf}$ wie in der Summe des III. Exempels.

IV. Exempel.

$$\begin{array}{l} 2a^4 + 15a^3 + a^2 - 17a - 19 \\ -a^4 - 7a^3 + 27a^2 - 18a - 9 \\ \hline a^4 + 8a^3 + 28a^2 - 35a - 8 = \text{Sum.} \end{array}$$

20

V. Exem-

V. Exempel.

$$a\,y^m - b\,y^n - c\,y^4 + d\,y^3 + h - l$$
$$\alpha\,y^m + \beta\,y^n - \gamma\,y^4 + \delta\,y^3 - i + k$$

$$\text{Summe} = (a+\alpha)\,y^m + (\beta - b)\,y^n - (c+\gamma)\,y^4 + (d+\delta)\,y^3 + h - i - l + k.$$

In dem IV. und V. Exempel sind Potenzen von gleichen Wurzeln und Exponenten zu addiren, vorhanden. Man sieht solche als gleichartige Größen an, und verfährt übrigens eben so, wie von der Addition zusammengesezter Größen ist gelehrt worden.

VI. Exempel.

$$4\sqrt[4]{\alpha^3} - 8\sqrt[3]{\beta^2} + 12\sqrt{\gamma}$$
$$5\sqrt[4]{\alpha^3} - 7\sqrt[3]{\beta^2} - 8\sqrt{\gamma}$$
$$9\sqrt[4]{\alpha^3} - 15\sqrt[3]{\beta^2} + 4\sqrt{\gamma} = \text{Summe.}$$

Hier hat man Wurzeln aus gleichen Potenzen, mit gleichen Wurzel-Exponenten nach den Regeln der Addition zusammengesezter Größen addirt, indem man solche Wurzeln als gleichartige Größen ansahe.

Soll man zwo zusammengesezte Größen von einander subtrahiren, so verfährt man auf folgende Art. Man schreibt nämlich die Größe, die man abziehen will, unter die, von welcher abgezogen werden soll, so, wie bey der Addition, und verwandelt die Zeichen der Theile der Größe, die man abziehen soll in das Entgegengesezte, nämlich + in — und — in + und addirt, wie vorhin ist gelehrt worden.

I. Exempel.

$$\begin{array}{ll} \text{Von} & 17a - 12b + 8c - 9d = A \\ \text{soll subt. werd.} & 2a + 8b - 3c - 11d = B \\ \text{Aender. der Z.} & - \quad - \quad + \quad + \\ \hline & 15a - 20b + 11c + 2d = \text{Differ.} \\ & = A - B \end{array}$$

II. Exempel.

$$\begin{array}{l} 7a + 5b + 2c - 4d + g - h \\ 4a + b + c + d - e + n \\ - \quad - \quad - \quad - \quad + \quad - \\ \hline 3a + 4b + c - 5d + g + e - h - n = \text{Diff.} \end{array}$$

III. Exempel.

$$\begin{array}{l} \frac{f}{g} - 3k + y + \frac{m}{n} - 5\frac{k}{l} \\ \frac{h}{g} + 7k + 8y - \frac{v}{p} - 8\frac{q}{r} \\ - \quad - \quad - \quad + \quad + \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Dff.} = \frac{f-h}{g} - 10k - 7y + \frac{mp+vn}{pn} - \frac{5kr+8ql}{lr}$$

Mit dem hier in diesem III. Exempel vorkommenden in Buchstaben ausgedruckten Brüchen von gleichen und ungleichen Nennern, ist nicht anders als wie es die Lehre von Brüchen (I, 74) erfodert, verfahren worden.

IV. Exempel.

$$\begin{array}{l} 5z^4 - 3z^3 - z^2 + z - 12 \\ 3z^4 + 12z^3 + 13z^2 - z - 8 \\ - \quad - \quad - \quad + \quad + \\ \hline 2z^4 - 15z^3 - 14z^2 + 2z - 4 \end{array}$$ Diff.

V. Exempel.

$$\begin{array}{l} \alpha y^m - \beta y^n + \gamma y^r - c \\ \delta y^m - \varepsilon y^n + \phi y^r + c \\ - \quad + \quad - \quad - \\ \hline (\alpha - \delta) y^m + (\varepsilon - \beta) y^n + (\gamma - \phi) y^r - 2c \end{array}$$ Diff.

VI. Exempel.

$$\begin{array}{l} 18\sqrt[4]{a^3} - 8\sqrt[3]{a^5} + \sqrt{a^8} \\ -15\sqrt[4]{a^3} + 8\sqrt[3]{a^5} - 17\sqrt{a^8} \\ + \quad - \quad + \\ \hline 33\sqrt[4]{a^3} - 16\sqrt[3]{a^5} + 18\sqrt{a^8} = \end{array}$$ Diff.

§. 4.

Wenn man a die Einheit des Centners, b des Pfundes, c des Lothes und d des Quentchens gelten läßt; so sieht des vorigen §. Additionsexempel. im Buche, so aus:

7 Cent. + 4 Pf. — 3 Loth — 4 Qu.
2 Cent. — 5 Pf. — 4 Loth + 6 Qu.

9 Cent. — 1 Pf. — 7 Loth + 2 Qu. =
8 Cent. + 100 Pf. — 1 Pf. — 7 Lt. + 2 Qu. =
8 Cent. + 99 Pf. — 7 Loth + 2 Qu. =
8 Cent. + 98 Pf. + 25 Loth + 2 Qu.; oder

nach

nach der gewöhnlichen Art geschrieben: 8 Cent. 98 Pf. 25 Loth, 2 Qu.

Eben dieses kommt heraus, wenn man nach der gewöhnlichen Art (I. Cap. §. 89. Erl. XII.) rechnet. In diesem Falle aber würde statt des Ausdrucks 7 Cent. + 4 Pf. — 3 Loth — 4 Qu. der ihm gleiche 7 Cent. 3 Pf. 28 ~~Centn.~~ (weil 4 Pf. — 3 Loth — 4 Qu. = 3 Pf. + 28 Loth) und statt des 2 Cent. — 5 Pf. — 4 Loth + 6 Qu. der diesem gleiche 1 Cent. 94 Pf. 29 Loth, 2 Qu. (denn 2 Cent. — 5 Pf. — 4 Loth + 6 Qu. = 1 Cent. + 95 Pf. — 4 Loth + 6 Qu. = 1 Cent. + 94 Pf. + 28 Loth + 6 Qu.) zu addiren vorgegeben seyn. Also addirt

7 Cent. 3 Pf. 28 Loth
1 Cent. 94 Pf. 29 Loth, 2 Qu.

8 Cent. 98 Pf. 25 Loth, 2 Qu.; wie gehör.

Auf ähnliche Art werden sich Anfänger durch andere Exempel die Sache nun selbst weiter erläutern und von ihrer Richtigkeit überzeugen können.

Wie aber die Rechnung mit entgegengesezten Größen selbst bey vielen im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungen mit vielen Nutzen gebraucht werden kann, wird genug seyn hier noch durch ein Exempel zu zeigen. Es sey daher zu addiren

6 Thl. 18 Gr.
2 Thl. 2 Gr.
5 Thl. 20 Gr.
4 Thl. 23 Gr.
13 Thl. 1 Gr.

Summe 32 Thl. 16 Gr. die man, nach der gewöhnlichen Art addirt, bekommt. Aber eben die und weit leichter erhält man, wenn man, da 6 Thl. + 18 Gr. = 7 Thl. — 6 Gr.; 5 Thl. + 20 Gr. = 6 Thl. — 4 Gr. und 4 Thl. + 23 Gr. = 5 Thl. — 1 Gr.; folgende Posten addirt:

7 Thl. — 6 Gr.
2 Thl. + 2 Gr.
6 Thl. — 4 Gr.
5 Thl. — 1 Gr.
13 Thl. + 1 Gr.

Summe 33 Thl. — 8 Gr. = 32 Thl. + 16 Gr.

Durch dieses lezte Verfahren hatte man bey den Groschen nicht so große Zahlen zu addiren, sahe gleich, was sich gegen einander aufhobe, und erspahrte sich die Reduction auf Thaler.

Aehnliches Verfahren läßt sich bey ähnlichen Fällen anbringen, wobey man allezeit, statt den gegebenen nächst kleinern Einheiten, wenn ihre Menge größer als die Hälfte der nächst größern Einheit ist, die negative Differenz zwischen dieser nächst größern Einheit und der vorgegebenen Menge der nächst kleinern, nimmt, und die Menge der nächst größern, um 1 vermehrt.

§. 5.

§. 5.

Aus diesen 3 Exempeln im Buche kann man schon sehen, wie durch Hülfe der bloßen Buchstabenrechnung allgemeine Säze erfunden werden können.

Das I. Exempel beweißt den I. Lehrsaz des IV. Capitels;

Das II. Exempel aber den: **das Quadrat** $[(a-b)^2]$ **der Differenz zwoer ungleichen Zahlen** (a und b) **ist der Unterschied der Summe ihrer Quadrate** (a^2+b^2) **und ihrem doppelten Producte** $(2ab)$. So kann man leicht andere finden, wie die Folge zeigen wird. Nun folgen einige Exempel:

I. Exempel.

Es soll $m-n+l$ multiplicirt werden
durch $n+l$

$$mn-nn+nl$$
$$+ml-nl+ll$$

Prod. $mn-nn+ml+ll=mn-n^2+ml+l^2$
$=(m-n)n+(m+l)l$

Es sind nämlich die Theile des Factors $m-n+l$ sowohl mit n als auch mit l multiplicirt, und dabey die jedem Theil des Products zukommenden Zeichen, wie sie I, 108, erfodert, gesezt worden. Indem man nun, $m-n+l$ mit n multiplicirt, erhält man das Partialproduct $mn-nn+nl$, wird aber $m-n+l$ durch l multipli-

plicirt, so ergiebt sich $ml - nl + ll$ zum Partialproducte; beyde nun zusammen addirt, geben das Product $mn - nn + ml + ll = mn - n^2 + ml + l^2 = (m - n) . n + (m + l) l = (m - n + l)(n + l)$.

II. Exempel.

$$
\begin{array}{r}
5a - 7b + 3d \\
2a - 2b - d \\
\hline
10aa - 14ab + bad \\
- 10ab + 14bb - 6bd \\
- 5ad + 7bd - 3dd \\
\hline
\end{array}
$$

Prod. $= 10aa - 24ab + ad + 14bb + bd - 3dd$

III. Exem-

III. Exempel.

$$\frac{a}{b}-\frac{3}{4}c+d-3\frac{e}{f},$$

$$-\frac{c}{d}+b-3\frac{f}{m}$$

$$-\frac{ac}{bd}+\frac{3}{4}\frac{cc}{d}-\frac{dc}{d}+3\frac{ec}{fd}$$

$$+\frac{ab}{b}-\frac{3}{4}cb+bd-3\frac{e}{f}b$$

$$-3\frac{fa}{mb}+\frac{9}{4}\frac{cf}{m}-3\frac{f}{m}d+9\frac{ef}{fm}$$

$$-\frac{ac}{bd}+\frac{3cc}{4d}+a-c-\frac{3}{4}cb-3\frac{fa}{mb}+3\frac{ec}{fd}+bd+\frac{9cf}{4m}-4+9\frac{e}{m}$$

$$=a-c+3\left(\frac{cc}{4d}-\frac{cb}{4}-\frac{fa}{bm}+\frac{ec}{fd}+\frac{3cf}{4m}+\frac{3e-fd}{m}\right),-\frac{ac}{bd}+bd$$

$$=\left(\frac{a}{b}-\frac{3}{4}c+d-3\frac{e}{f}\right)\left(-\frac{c}{d}+b-3\frac{f}{m}\right).$$

Bey den in diesem Exempel vorkommenden Brüchen, hat man nicht anders, als wie es die Regeln der Multiplication in der Lehre von Brüchen (I, 64, 75) erfodern, verfahren.

§. 6.

Ob gleich hier ausführlichere Regeln der Division eben nicht nöthig sind, und unser Herr Autor dergleichen in seinen Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen §. 6. gegeben hat; so wird es doch auch nicht undienlich seyn, wenn wir Anfängern hier kürzlich zeigen, wie zusammengesezte Größen mit einander zu dividiren sind. Man ordnet nämlich die Glieder des Dividendi so, daß alle diejenigen zuerst stehen, die mit dem ersten Gliede des Divisors gemeinschaftliche Factoren haben. Nun dividirt man das erste Glied des Dividendi durch das erste des Divisors so, wie die Auflösung dieses §. im Buche fodert; dadurch erhält man das erste Glied des Quotienten, welches man durch den ganzen Divisor multiplicirt, das dadurch erhaltene Product vom Dividendus abzieht, und den Ueberrest des Dividendus herunter holt. Dieser Ueberrest wird wieder durch das erste Glied des Divisors dividirt, und eben so, wie vorher, verfahren. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis entweder der Dividendus ganz aufgehet, oder, wenn das nicht geschiehet, so sezt man zu den gefundenen Gliedern des Quotienten einen Bruch, dessen Zähler der lezte Rest und der Nenner der Divisor ist. Man siehet leicht,

daß

daß dieses Verfahren demjenigen völlig ähnlichet, das im 40. §. des Isten Cap. für die Zahlen vorgeschrieben worden; und daß also die dortigen Gründe hier ebenfalls statt haben.

I. Exempel.

$$
\begin{array}{r|l|l}
\text{Divisor} & \text{Dividendus} & \\
a-b & aa-2ab+bb & a-b \\
 & aa-ab & \\
\hline
 & -ab+bb & \\
 & -ab+bb & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Wenn man nämlich aa durch a dividirt, so erhält man a zu des Quotienten ersten Gliede, und dieses in a — b multiplicirt, giebt zum Producte aa — ab; Sezt man dieses unter den Dividendus, und zieht es von ihm ab, so bleibt — ab + bb, wovon man — ab durch a dividirt, und — b zu des Quotienten zweytem Gliede erhält. Multiplicirt man nun — b in a — b, so kommt zum Producte — ab + bb, welches von — ab + bb abgezogen o zum Reste läßt: und also a — b der völlige Quotiente ist.

II. Exempel.

Divisor	Dividendus	Quot.
$2a + 3b - 2d$	$10aa + 11ab - 12ad - 6bb + bd + 2dd$	$5a - 2b - d$
	$10aa + 15ab - 10ad$	
	$-4ab - 2ad - 6bb + bd + 2dd$	
	$-4ab - 6bb + 4db$	
	$-2ad - 3db + 2dd$	
	$-2ad - 3db + 2dd$	
	0	

III. Exem-

III. Exempel.

$$\frac{a}{b} - c \,\Big|\, a - cb + \frac{am}{bn} - \frac{cm}{n} \,\Big|\, b + \frac{m}{n}$$

$$\underline{a - cb}$$

$$+ \frac{am}{bn} - \frac{cm}{n}$$

$$\underline{+ \frac{am}{bn} - \frac{cm}{n}}$$

$$0$$

Daß mit den in diesem Exempel vorkommenden Brüchen, nicht anders, als nach der Lehre von Brüchen verfahren worden ist, werden Anfänger von selbsten einsehen.

§. 7.

Also ist eine .... ist. Nämlich das Product ist eine Potenz, deren Exponente die Summe der Factoren ist.

So ist das Product $b^m \times b^n = b^{m+n}$ eine Potenz von eben der Wurzel b, deren Exponente $m + n$ aber, ist die Summe der Exponenten m und n, der Factoren b^m und b^n. Wenn man diese Regel beobachtet, so kann man zusammengesezte Größen, in welchen Potenzen vorkommen, mit einander multipliciren; wie nachstehende Exempel zeigen.

$$
\begin{array}{l}
a^3 + ab^2 - c^5 \\
\quad 3a^5 - c^7 \\
\hline
3a^8 + 3a^6 b^2 - 3a^5 c^5 \\
\quad - a^3 c^7 - ab^2 c^7 + c^{12} \\
\hline
3a^8 + 3a^6 b^2 - a^3 c^7 - 3a^5 c^5 - ab^2 c^8 + c^{12}
\end{array}
$$

$$= 3(a^8 + a^6 b^2 - a^5 c^5) - (a^3 + ab^2) c^7 + c^{12}$$

Wenn Anfänger den 5ten und 7ten §. und dessen Erläuterung wohl gefaßt haben, so werden sie leicht das Verfahren dieses und folgende Exempel begreifen.

Ferner

$$\begin{array}{l} az^3 - bz^2 + cz + g \\ \qquad \alpha z^2 - \beta z - h \\ \hline a\alpha z^5 - b\alpha z^4 + c\alpha z^3 + g\alpha z^2 \\ \qquad - \beta a z^4 + b\beta z^3 - c\beta z^2 - g\beta z \\ \qquad\qquad - h a z^3 + h b z^2 - h c z - g h \\ \hline \end{array}$$

$$\text{P)}\ a\alpha z^5 - (b\alpha + \beta a) z^4 + (c\alpha + b\beta - ha) z^3 + (g\alpha - c\beta + hb) z^2 - (g\beta + hc) z - gh.$$

In

In diesem Exempel so wie im IV. der Erl. des 3ten §. findet man, daß die Glieder so nach einander folgen, wie die Exponenten der Potenzen von ein und eben derselben Wurzel von der Linken nach der Rechten zu, abnehmen. Die Glieder können aber auch in solchen Ausdrücken nach dem Wachsen der Exponenten der Potenzen von der Linken nach der Rechten, folgen. Dergleichen Ausdrücke nun, sind, auf diese Art **nach den Potenzen geordnet**; und man beobachtet dies gewöhnlich bey ihnen. So sind in unserm Exempel der Multiplicator und das Multiplicandum nach den Potenzen von z geordnet. Und man würde das Product bey P bequem nach folgender Regel ausdrücken: Nämlich die einzelnen Producte, die in einerley Potenz multiplicirt sind, sezt man unter einander hin, und schreibt, der Kürze wegen, nur die **Coefficienten**, (das sind diejenigen Factorn, die in die Potenzen multiplicirt sind, wie a, c, c, $a\alpha$, — $(b\alpha + \beta a)$ u. s. w. in unserm Exempel hier; oder wie 2, — 1, 15, — 7 ꝛc. im IV. Additionsexempel des 3ten §.) unter einander, und nach dem man zur Rechten einer Columne Coefficienten, herabwärts einen Strich gemacht hat, sezt man an den ersten die darein zu multiplicirende Potenz. Auf diese Art also, drückt sich unser Product bey P nun so aus:

$$
a\alpha z^5 \begin{array}{r|} -\,b\alpha \\ -\,\beta a \end{array} z^4 \begin{array}{r|} +\,c\alpha \\ +\,b\beta \\ -\,ha \end{array} z^3 \begin{array}{r|} +\,g\alpha \\ -\,c\beta \\ +\,hb \end{array} z^2 \begin{array}{r|} -\,g\beta \\ -\,hc \end{array} z - gh.
$$

§. 8.

Der Ausdruck $(a^2)^3$ sagt, daß man a^2 zur dritten Potenz erheben soll: und dies geschiehet, indem a^2 dreymal mit sich selbst multiplicirt wird; folglich ist $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = a^6$. Dieses gilt für jede Potenz. Sezt man demnach $2 = m$; $3 = n$ und $a = x$; so wird aus $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3}$ nun der allgemeine Ausdruck $(x^m)^n = x^{mn}$: und daher hat man für die Erhebung einer Potenz auf eine neue von einem gegebenen Exponenten, diese Regel: Man multiplicire den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem neuen Exponenten; da man alsdenn zum Producte den Exponenten der verlangten Potenz von eben der Wurzel erhält.

§. 9.

$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$: denn, wenn $x^{\frac{n}{m}}$ die Wurzel des nten Grades aus x^n ist, so muß $x^{\frac{n}{m}}$ auf die Potenz des mten Grades erhoben, gleich x^n seyn; Aber $\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^m = x^{\frac{n}{m} \cdot m}$ und also $= x^n$. Wenn man demnach die Wurzel eines verlangten Grads aus einer gegebenen Potenz, nicht durch die Art der Voransetzung des Wurzelzeichens ausdrücken will; so muß man den Exponenten (n) der gegebenen Potenz (x^n) mit dem verlangten Exponenten der

Wurzel

Wurzel (m) dividiren und den Quotienten $\left(\frac{n}{m}\right)$ für den Exponenten einer Potenz von eben der Wurzel (x) annehmen. Dadurch erhält man eine Potenz, die der verlangten Wurzel gleich ist.

Wollte man aus a^{16} die Wurzel des 4ten Grads ziehen, so würde man a^4, als eine Potenz, gleich der verlangten Wurzel, erhalten.

Man kann den Ausdruck z. E. $c^{\frac{1}{2}}$ der die Quadratwurzel aus c anzeigt, auch so verstehen: nämlich daß er die Größe des Factors bedeutet, den man erhält, wenn man c in zwey gleiche Factore theilet, so wie $e^{\frac{1}{3}}$ die Größe des Factors anzeigt, den man durch die Theilung des e in drey gleiche Factore erhält. Daher ist $x^{\frac{1}{m}}$ und $x^{\frac{n}{m}}$ die Größe des Factors, der durch die Theilung von x und x^n in m gleiche Factoren erlangt wird. (Man sehe hiervon **Karstens Lehrbegriff der Mathematik** 2. Theil, §. 59.)

§. 10.

Vermittelst dieser Regel kann man auch solche zusammengesezte Größen, die nach den Potenzen einer gewissen Größe geordnet sind (§. 7. Erl.) mit einander dividiren, wenn man nur übrigens eben so, wie §. 6. und dessen Erl. erfodert, verfährt. Z. B.

a^2 —

$$
\begin{array}{l|l}
a^2 - 2ab + b^2 & a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \;|\; a^2 - 2ab + b^2 \\
 & a^4 - 2a^3b + a^2b^2 \\
\hline
 & -2a^3b + 5a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
 & -2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 \\
\hline
 & a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\
 & a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

§. 11.

$x^0 = 1$; das heißt, jede Potenz dessen Exponente $= 0$ ist, ist $= 1$: Und Anfängern wird es nicht schwer fallen, dies einzusehen, so bald sie bedenken, daß x^m durch x^m dividirt, zum Quotienten 1 giebt: Aber dieser Quotiente ist auch eine Potenz von x dessen Exponente $= m - m = 0$ ist:

ist: Folglich muß $x^0 = 1$ seyn. (Man sehe hiervon Karstens Lehrbegriff der Math. 2. Theil §. 67.)

§. 12.

$$\frac{a^3}{a^7} = a^{-4} = \frac{1}{a^4}: \text{ denn } \frac{a^3}{a^7} = \frac{a^3}{a^{3+4}} = \frac{a^3}{a^3\,a^4} = \frac{a^3 \cdot 1}{a^3\,a^4}$$

$= \frac{1}{a^4}$; Aber $\frac{a^3}{a^7}$ ist auch $= a^{3-7} = a^{-4}$; folglich

$a^{-4} = \frac{1}{a^4} = \frac{a^3}{a^7}$.

Ueberhaupt, sey $r > n$; folglich $a^r > a^n$ und $r = n + d$, wenn d der Unterschied zwischen r und n ist; so wird $\frac{a^n}{a^r} = \frac{a^n}{a^{n+d}} = a^{n-(n+d)} =$

$a^{n-n-d} = a^{-d}$; Aber $\frac{a^n}{a^{n+d}}$ ist auch $= \frac{a^n}{a^n\,a^d} =$

$\frac{a^n \cdot 1}{a^n\,a^d} = \frac{1}{a^d}$; Folglich $a^{-d} = \frac{1}{a^d}$.

§. 13.

Wenn man Potenzen von gleichen Wurzeln, wovon die eine einen positiven Exponenten die andere aber einen negativen hat, mit einander multipliciren will, so darf man ebenfalls nur den negativen Exponenten zum positiven addiren; die Summe ist der Exponente einer Potenz von eben der Wurzel der Factoren; und diese Potenz ist das verlangte Product: denn

a^{+m}

$$a^{+m} \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$= a^{m+(-n)}$ (I. 96.)

§. 14.

Wollte man das Product ab auf die 5te Potenz z. E. erheben; so müßte man ein Product aus 5 gleichen Factoren, davon jeder = ab ist, machen; und dieses Product muß also ab . ab . ab . ab . ab seyn. Nun kömmt in diesem Product der Factor a, 5 mal, und eben so vielmal der Factor b, vor. In einem Producte aber, wo a so wohl als b, 5 mal vorkommt, hat man a^5 und b^5; (I, 45) folglich ab . ab . ab . ab . ab = $a^5 b^5 = (ab)^5$.

Wenn man demnach ein Product auf eine gewisse Potenz erheben will, so muß man jeden Factor desselben, auf eben die Potenz erheben, und so mit einander multipliciren.

§. 15.

Die Wurzel eines gewissen Grades (n) aus einem Product (cd) zu ziehen, muß man eben dieselbe aus jedem Factor (c so wohl als d) dieses Products ziehen, und alsdenn multipliciren. Denn $\sqrt[n]{cd} = \sqrt[n]{c} . \sqrt[n]{d}$; weil $(\sqrt[n]{c} . \sqrt[n]{d})^n = (\sqrt[n]{c})^n . (\sqrt[n]{d})^n$ (nach 14) $= (c^{\frac{1}{n}})^n . (d^{n})^{\frac{1}{n}}$ (nach 9) $= c^{\frac{1}{n} . n} . d^{\frac{1}{n} . n}$ (nach 8) $= c^{\frac{n}{n}} . d^{\frac{n}{n}} = cd$ ist.

§. 16.

Einen Bruch oder Quotienten auf eine gewisse Potenz zu erheben, darf man nur, den Zähler sowohl, als den Nenner auf eben diese Potenz erheben.

§. 17.

$\sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$; d. h. die Wurzel eines gewissen Grades (n) aus einem Bruche $\left(\frac{x}{y}\right)$ ziehet man, wenn die Wurzel eben dieses Grades (n) so wohl aus dem Zähler (x) als auch aus dem Nenner (y) zieht. Denn wenn dies seine Richtigkeit hat, so muß $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ zur Potenz n erhoben gleich $\frac{x}{y}$ seyn. Aber $\left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{x})^n}{(\sqrt[n]{y})^n}$ (16)

$$= \frac{(x^{\frac{1}{n}})^n}{(y^{\frac{1}{n}})^n} \text{ (9)} = \frac{x^{\frac{1}{n}\cdot n}}{y^{\frac{1}{n}\cdot n}} \text{ (8)} = \frac{x^{\frac{n}{n}}}{y^{\frac{n}{n}}} = \frac{x}{y}.$$

Einige Anwendung.

Es ist bekannt, daß in einer jeden Aufgabe eine oder mehrere Größen durch bekannte oder gegebenen Größen gesucht werden. Nun muß aber eine jegliche Rechnungsaufgabe solche Bedingungen enthalten, daraus man beurtheilen kann, in welcher

cher Verbindung die gegebenen Größen, die man der Bequemlichkeit wegen, durch die ersten Buchstaben des Alphabets a, b, c, ꝛc. anzeigt, mit den gesuchten, so aus gleicher Ursache durch die lezten Alphabetsbuchstaben z, y, x, ꝛc. angedeutet werden, stehen; und eben dadurch muß man die Auflösung der Rechnungsaufgabe zu finden suchen, indem man sieht, wie die gegebenen Größen durch die arithmetischen Operationen verändert werden müssen, um die gesuchten zu erhalten. Würde nun in einer Rechnungsaufgabe nur eine unbekannte Größe gesucht, so muß sothane Aufgabe solche Bedingungen enthalten, wodurch mittelst den arithmetischen Operationen ein Ausdruck gemacht werden, in welchem zwar die gesuchte Größe mit der gegebenen verbunden seyn kann, der aber eine Größe ausdrückt, die einer andern, so entweder die Aufgabe unmittelbar angiebt, oder nach den Umständen der Aufgabe auch durch die arithmetischen Operationes gesucht werden muß, gleich ist. Aber ein doppelter Ausdruck einer und eben derselben Größe, heißt eine **Gleichung**; (§. 9. Vor.) Daher muß man aus den Bedingungen der Aufgabe eine Gleichung, die man die **Fundamentalgleichung** nennet, machen. Hierauf wird die unbekannte Größe auf eine Seite geschaffet; und wenn sie noch mit bekannten verbunden ist, davon befreyet, damit sie alleine auf der einen Seite des Gleichheitszeichen so stehet, daß sie den bekannten Größen, die auf der andern Seite des Gleichheitszeichen mit einander verbunden sind,

gleich ist. Aber alles dieses geschiehet, indem das Addirte subtrahirt, das Subtrahirte addirt, das Multiplicirte dividirt, und das Dividirte multiplicirt wird; ferner aus den Potenzen die Wurzel gezogen, und hinwiederum die Wurzel zu Potenzen, erhoben, werden. Dabey aber muß man allezeit, um die Gleichung zu erhalten, das, was auf der einen Seite geschiehet, auch auf der andern thun. (I, 88.) Und, so verfahren, findet man das, was der gesuchten Größe gleich ist. Alles dieses wird durch Exempel deutlicher werden.

I. Exempel.

Eine Zahl 100 soll in drey Theile getheilt werden, wovon der zweyte Theil doppelt so groß als der erste, der dritte aber halb so groß als der erste und zweyte Theil zusammen und noch um 10 grösser seyn soll.

Wüßte man den ersten Theil, so sind die andern leicht zu finden: Aber da er uns unbekannt ist, und hier alles andere von ihm abhängt, so ist er die Größe, die man finden muß. Man setze also dieser erste Theil wäre x; so ist nach den Bedingungen der Aufgabe, der zweyte Theil gleich 2 x, und der dritte gleich x + 2 x halb genommen, und zu dieser Hälfte noch 10 addirt, d. i. der dritte Theil ist gleich $\frac{x + 2x}{2} + 10 = \frac{3x}{2} + 10$;

Also sind alle diese drey Theile zusammen =

x +

$x + 2x + \frac{3x}{2} + 10 = 3x + \frac{3x}{2} + 10$: Da nun aber auch dieselben zusammen so viel als 100 betragen müssen, so erhält man die Fundamentalgleichung

$$3x + \frac{3x}{2} + 10 = 100$$

Um nun die gesuchte Größe x alleine zu erhalten, so multiplicire man erstlich um lauter ganze Zahlen zu bekommen, auf beyden Seiten des Gleichheitszeichen mit 2; und es wird

$$(3x + \frac{3x}{2} + 10) \cdot 2 = 100 \cdot 2$$

$$= 2 \cdot 3x + 2 \cdot \frac{3x}{2} + 2 \cdot 10 = 200 = 6x + 3x + 20$$

$= 9x + 20$; Folglich

$$200 = 9x + 20$$

Ferner ziehe man auf beyden Seiten 20 ab, so ergiebt sich

$$200 - 20 = 9x + 20 - 20 =$$
$$9x = 180$$

Also

$$180 = 9x$$

Endlich dividire man auf beyden Seiten mit 9; so erhält man

$$\frac{180}{9} = \frac{9x}{9} = 20 = x$$

Folglich ist der verlangte erste Theil $x = 20$; und also der 2te $= 2 \cdot 20 = 40$; der dritte aber $= \frac{20 + 40}{2} + 10 = \frac{60}{2} + 10$, also ebenfalls $=$ 40; und die Summe dieser drey Theile ist $20 + 40 + 40 = 100$, wie es seyn soll.

II. Exempel.

Man soll eine Zahl finden, daß, wenn man zu ihr 9 addirt, und die Summe mit 5 dividirt, 13 heraus kommt. Wäre diese Zahl die man finden soll gleich x, so muß nach den Bedingungen der Aufgabe x und 9 addirt und diese Summe durch 5 dividirt, gleich 13 seyn: Mithin erhält man die Fundamentalgleichung

$$\frac{x + 9}{5} = 13;$$

Man multiplicire auf beyden Seiten mit 5, so erhält man

$$\frac{x + 9}{5} \cdot 5 = 13 \cdot 5$$

oder $x + 9 = 65$; Ziehet man nun 9 auf beyden Seiten ab, so ergiebet sich

$$x + 9 - 9 = 65 - 9$$

oder $x = 56$.

III. Exempel.

Eine Zahl zu finden, dessen Hälfte, dritte Theil, vierte Theil zusammen, eins mehr beträgt als die

Zahl

Zahl selbst. Es sey die Zahl = x; so muß nach den Bedingungen der Aufgabe

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 1$$

seyn; aber

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{6x}{12} + \frac{4x}{12} + \frac{3x}{12}$$

$$= \frac{13x}{12}$$; folglich $x + 1 = \frac{13x}{12}$

Man multiplicire so wohl $x + 1$ als auch $\frac{13x}{12}$ mit 12, so erhält man

$$12x + 12 = 13x$$

Ziehet man endlich 12 x auf beyden Seiten ab, so ergiebet sich

$$12x + 12 - 12x = 13x - 12x$$

oder $12 = x$

Also ist 12 die Zahl dessen Hälfte 6, dritte Theil 4, und vierte Theil 3 zusammen um 1 grösser sind, als die 12 selbsten.

IV. Exempel.

Aus der gegebenen Tagereise zweener Bothen, und der Zeit da der andere dem ersten nachgehet, die Zeit zu finden, wenn er den ersten einholet. Es wird voraus gesezt, daß beyde von ein und ebendenselben Orte ausgehen; und der erste gehe täglich 5 Meilen, der andere 7; und der erste

 sey

sey schon 6 Tage weg, ehe der andere seinen Weg antritt. Man setze auch die Tage in den der erste von dem andern eingeholt wird gleich x; so ist die Zeit in der der erste Bothe gereißt ist, ehe ihn der andere einholt $= 6 + x$; und weil der erste täglich 5 Meilen geht, so hat er, ehe er eingeholt wird, einen Weg von $(6 + x) . 5 = 30 + 5x$ Meilen zurücke gelegt. Weil nun nach der Voraussezuug die Zeit des andern Bothen in der er geht bis er den ersten einholt $= x$ ist; so ist, indem er täglich 7 Meilen gehet, sein Weg, den er zurücke legt, ehe er den ersten einholt, $= 7x$ Meilen. Da nun beyde von einerley Ort ausgehen und in einerley Ort zusammen kommen; so durchlaufen sie einen gleichen Weg: Folglich ist

$$30 + 5x = 7x$$
$$30 + 5x - 5x = 7x - 5x = 30 = 2x;$$
und also $x = 15$

Oder in 15 Tagen wird der erste Bothe von den andern eingeholt.

V. Anmerkung.

Dieses kann allgemeiner so vorgetragen werden. Von einerley Orte aus bewegen sich zwey Körper A und B, und zwar B geschwinder als A, so, daß die Geschwindigkeit des Körpers A, gleich v, die, des Körpers B gleich u, ist, und beyde Geschwindigkeiten gegeben sind. Der Körper A ist schon eine bekannte Zeit t weg, ehe B anfängt sich

zu bewegen: Man will die Zeit x wissen, in der B den Körper A, einholt.

Die Zeit, in welcher A gelaufen ist, ehe ihn B einholt, ist $= t + x$ und da seine Geschwindigkeit $= v$ ist, so ist der in der Zeit $t + x$ zurück gelegte Weg $= (t + x) v = v t + v x$, und der von B in der Zeit x zurück gelegte Weg $= u x$; Beyde Wege sind aber gleich: Folglich ist

$$u x = v t + v x$$
$$v x = \quad v x \text{ abgezogen, giebt}$$

$$u x - v x = v t; \text{ Aber}$$
$$u x - v x = (u - v) x; \text{ Also}$$

$$v t = (u - v) . x; \text{ und mithin } \frac{v t}{u - v} = \frac{(u - v) . x}{u - v} = x$$

Wenn man also die Geschwindigkeit v des Körpers A in die Zeit t, welche schon verflossen ist, ehe sich B zu bewegen anfängt, multiplicirt, und dieses Product durch die Differenz, die man erhält, wenn man von der größern Geschwindigkeit u, die kleinere v abziehet, dividirt; so zeigt der Quotiente die Zeit x des Einholens in eben dem Maaße an, in dem t gegeben ist.

Es sey $v = 3$; $t = 8$ Minuten, und $u = 7$; so ist

$$x = \frac{3 \cdot 8}{7 - 3} = \frac{24}{4} = 6 \text{ Min.}$$

Daß also in diesem Falle der Körper B den Körper A in 6 Minuten einholt.

VI. Exempel.

Funfzig Lachter vor einem Stollorte zurücke, stehet die Stollfürste an: Es soll dieselbe dem Orte nachgerissen und daher mit 3 Mann zu 8 Stunden belegt werden. Diesen 3 Arbeitern nun, wird nach befundener Festigkeit des Gesteins $2\frac{1}{2}$ Lachter wöchentlich heraus zu schlagen aufgegeben, da vor Ort in eben der Zeit nur $\frac{1}{2}$ Lachter aufgefahren wird: Man verlangt bey Voraussetzung einerley Festigkeit des Gesteins zu wissen, in wie viel Wochen die Fürste dem Stollorte nachgerissen ist.

Man siehet leicht, daß dieses Exempel nur eine Anwendung von vorigen V. §. ist. Hier ist v t = 50 Lachter: denn eigentlich ist das Product v t nichts anders als der Weg, wie weit der Körper A schon voraus ist, ehe B zu laufen anfängt. Ferner ist hier $v = \frac{1}{2}$; und $u = 2\frac{1}{2}$; Also $\frac{v\,t}{u - v} =$

$$\frac{50}{2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{50}{2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{50}{2} = 25;$$ Folglich in 25 Wochen.

VII. Exem-

VII. Exempel.

Zu finden, wie viel Hunde in einer Schicht auf einer gewissen Strecke, dessen Länge in Lachtern gegeben ist, gestoßen werden können, wenn der Hundestößer zugleich den Hund füllen und ausstürzen muß. Es sey die Länge der Strecke auf welcher der Hund gestoßen werden soll = m Lachter; t die Zeit einer Schicht;

a die Anzahl der Lachter durch die der Hund in einer Minute gestoßen wird;

b die Anzahl der Minuten die zum Einfüllen und Ausstürzen eines Hundes erfodert werden.

(Diese beyde Größen a, und b, müssen durch Versuche bestimmt werden.)

x die Anzahl der Hunde, die durch die Länge m, in einer Schicht gestoßen und zugleich ausgestürzt und eingefüllt werden sollen;

so ist, aus der Natur der Sache

$$2\,m\,x$$

die Anzahl der Lachter die der Hundestößer mit x Hunden, in einer Schicht zu durchlaufen hat;

$\frac{2\,m\,x}{a}$ die Anzahl der Minuten, die, um die Länge 2 m x zu durchlaufen, nöthig sind;

x b die Zeit in Minuten, welche zu Einfüllung und Ausstürzung der x Hunde erfodert wird.

Nun muß in der Schicht t, der Hundestößer so wohl 2 m x Lachter durchlaufen, und dazu ge-

hört die Zeit $\frac{2\,m\,x}{a}$, als auch x Hunde einfüllen und ausstürzen; aber dazu ist die Zeit x b erfoderlich: Folglich muß

$$t = \frac{2\,m\,x}{a} + x\,b = \frac{2\,m\,x + x\,b\,a}{a},$$

nämlich gleich der Zeit, seyn, in welcher x Hunde sowohl zu füllen und auszustürzen, als auch auf der Strecke von m Lachtern hin und her zu stoßen sind. Da nun

$$t = \frac{2\,m\,x + x\,b\,a}{a}$$

so ist

$$t\,a = 2\,m\,x + x\,b\,a = (2\,m + b\,a)\,x:$$

und folglich

$$x = \frac{t\,a}{2\,m + b\,a}$$

Ist $t = 360$ Minuten $= 6$ Stunden
$a = 33\frac{1}{3}$ Lachter;
$b = 3$ Minuten;
$m = 100$ Lachter

so ist $x = \frac{360 \times 33\frac{1}{3}}{2 \cdot 100 + 3 \cdot 33\frac{1}{3}} =$

$$\frac{360 \cdot (33 + \frac{1}{3})}{2 \cdot 100 + 3 \cdot (33 + \frac{1}{3})} = \frac{360 \cdot 33 + 360 \cdot \frac{1}{3}}{200 + 3 \cdot 33 + 3 \cdot \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{11880 + 120}{200 + 99 + 1} = \frac{12000}{300}$$

$$= 40;$$

$= 40$; Also hätte in diesem Falle ein Hundestösser 40 Hunde zu stoßen.

Diese Aufgabe habe ich von der Gewogenheit des Herrn Bergmeister Scheidhauer.

VIII. Anmerkung.

Wenn x, a, b, t, bekannt, so läßt sich m so finden: Es ist

$$t = \frac{2mx + xba}{a}; \text{ Also}$$

$ta = 2mx + xba$; und $ta - xba = 2mx$;

$$\text{daher } m = \frac{ta - xba}{2x} = \frac{(t - bx)a}{2x}$$

Ist $t = 360$ Minuten
$a = 33\frac{1}{3}$ Lachter
$b = 3$ Minuten
$x = 40$

so ist

$$m = \frac{(360 - 3 \cdot 40) \cdot 33\frac{1}{3}}{2 \cdot 40} =$$

$\frac{240 \cdot (33 + \frac{1}{3})}{80} = 3 \cdot (33 + \frac{1}{3}) = 100$, wie es nach VII seyn soll. Ist x, m, t, b bekannt, so wird a folgendermaßen gefunden:

Es ist

$$t = \frac{2mx + xba}{a}$$

$$ta = 2mx + xba; \text{ Also}$$

$$t\,a - x\,b\,a = 2\,m\,x = (t - x\,b)\,a;$$

folglich $a = \frac{2\,m\,x}{t - x\,b}$

Und so läßt sich, wenn von den fünf Größen, a, b, m, t, x viere bekannt seyn, leicht die fünfte finden.

IX. Exempel.

Zween Bothen, gehen gegen einander: Man soll aus der gegebenen Weite der Oerter, aus beyder Tagereisen und der Zeit, um welche einer früher ausgehet als der andere, ihre Zusammenkunft bestimmen. Es sey die Zeit, um welche der erste früher ausgehet als der andere = t, des ersten Tagereise = a; des andern Tagereise um n größer und daher = a + n; die Weite der Oerter von den sie ausgehen = d, die Zeit, die von dem Ausgange des andern bis er dem ersten begegnet verfließet = x: so ist die Zeit in der der erste reißt bis der andere ihm begegnet = t + x: denn er gehet um die Zeit t eher aus und die Zeit x vergehet ehe der andere ihm begegnet. Da der erste nun in einem Tage den Weg a zurücke legt, so muß er in der Zeit t + x, die vergeht, ehe ihm der andere begegnet, oder in t + x Tagen, einen Weg = (t + x) a = t a + x a zurücke legen: und dies muß der Weg seyn, den er bis zu der Zusammenkunft mit dem andern gegangen ist. Weil aber auch der andere die Zeit x, oder x Tage, zubringt, bis er dem ersten begegnet, und in einem Tage einen

Weg = a + n durchlauft, so durchwandert er in der Zeit x den Weg = (a + n) . x = a x + x n, welches der Weg ist, den er bis zu der Zusammenkunft mit dem ersten, zurück gelegt hat.

Es müssen daher beyde Wege zusammen der Weite d der Oerter von den sie ausgiengen, gleich seyn. Folglich ist

$d = ta + ax + ax + nx = ta + 2ax + nx = ta + (2a + n)x$; daher $d - ta = ta + (2a + n) . x - ta = (2a + n)x$; und also

$$\frac{d - ta}{2a + n} = \frac{(2a + n)x}{2a + n} = x$$

Es sey $t = 3$; $a = 5$; $n = 1$; $d = 92$

so ist $x = \frac{92 - 3 . 5}{2 . 5 + 1} = \frac{92 - 15}{11} = \frac{77}{11} = 7$

Also wird die Zeit der Zusammenkunft in 7 Tagen geschehen, wenn $t = 3$ Tage ist.

X. Anmerkung.

Wenn die Bothen zu gleicher Zeit ausgehen, so ist $t = 0$; folglich ist nun

$$x = \frac{d - a0}{2a + n} = \frac{d - 0}{2a + n} = \frac{d}{2a + n}.$$

XI. Anmerkung.

Wenn man statt Bothen allgemein Körper und statt Tagereisen, Geschwindigkeit, sezt; so läßt sich diese Aufgabe allgemein so vortragen:

Zween Körper bewegen sich gegen einander: Man soll aus der Weite d der Oerter, aus beyder Geschwindigkeiten, a und a + n und aus der Zeit t, um welche der eine Körper seine Bewegung eher anfieng als der andere, die Zeit x ihrer Zusammenkunft, bestimmen.

XII. Exempel.

In der Anmerkung des 252 §. des Berichts vom Bergbau findet man die Aufgabe:

Aus der Entfernung (d) zweyer gegen einander getriebenen Oerter, und aus den, durch die Festigkeit des Gesteins und Anzahl der vor jedes Ort gelegten Arbeiter, sich bestimmenden Geschwindigkeiten (a und a + n) oder aus den unterschiedenen Längen (a und a + n) welche mit jedem Orte in einerley Zeit t aufgefahren werden, den Punct und die Zeit (x) zu berechnen, in den, beyde Oerter auf einander durchschlägig zu machen sind.

Die zu suchende Zeit (x) in dieser Aufgabe kann man mittelst der (in X) gefundenen Formel, $x = \frac{d}{2a + n}$ und also auch den Punct des Durchschlages finden. Dieser ist nämlich von dem Orte, wo a in der Zeit t aufgefahren wird, um $\frac{da}{2a + n}$, und von dem, wo in eben der Zeit, a + n aufgefahren wird, um $\frac{d(a + n)}{2a + n}$ entfernet, wie man

man leicht einsieht. Es sey, z. B. die Entfernung beyder schon gangbaren Gegenörter = 100 Lachter, und vor dem einen werde in einer Woche 2 Lachter und vor dem andern in eben der Zeit 3 Lachter = 2 + 1 Lachter heraus geschlagen; so findet man die Zeit (x) des Durchschlages in Wochen, wenn man in der Formel $x = \frac{d}{2a + n}$, für d die 100; für a die 2, und für n die 1 sezt: Es wird also

$$x = \frac{100}{2.2 + 1} = \frac{100}{5} = 20$$

und folglich bey einerley Festigkeit des Gesteins der Durchschlag in 20 Wochen geschehen; da also unterdessen vor dem Orte, vor welchem in 1 Woche 2 Lachter aufgefahren wird, 2 . 20 = 40 Lachter, und vor dem wo man in 1 Woche 3 Lachter heraus hauet 3 . 20 = 60 Lachter herausgeschlagen werden, und mithin der Punct des Durchschlages von jenem Orte 40 Lachter, $= \frac{100 . 2}{2 . 2 + 1}$ Lachter von diesem aber 60 Lachter, $= \frac{100(2 + 1)}{2 . 2 + 1}$ Lachter entfernet seyn, muß.

XIII. Exempel.

m Kannen Wein zu a Groschen, sollen mit andern zu c Groschen so gemischt werden, daß die Kanne für einen mittlern Preis von b Groschen ver-

verkauft werden kann: Wie viel Kannen des Weins, davon die Kanne c Groschen kostet, braucht man hierzu?

Die Anzahl der dazu benöthigten Kannen sey = x, so ist der Werth der vorhandenen m Kannen Wein = m a Groschen, und der Werth der zur Mischung erforderlichen x Kannen = x c Groschen; beyde also = (a m + c x) Groschen: da aber auch zu den m Kannen noch x Kannen kommen sollen, damit jede der m + x Kannen für b Groschen verkauft werden kann; so muß der Werth der m + x Kannen = (m + x). b Groschen, und folglich beyde Werthe einander gleich seyn: Also ist

$$a m + c x = (m + x) b = m b + b x;$$

daher $a m = m b + b x - c x$ und

$$a m - m b = b x - c x;$$ oder

$$(a - b) m = (b - c) x;$$ folglich

$$\frac{(a - b) m}{b - c} = x$$

Es sey m = 40 Kannen; a = 10 Gr. c = 4 Groschen, b = 6 Groschen; so ist

$$x = \frac{(10 - 6) . 40}{6 - 4} = \frac{4 \cdot 40}{2} = 80$$

Folglich müssen hier 80 Kannen von dem Weine, wo die Kanne 4 Groschen gilt, unter dem, wo sie 10 Groschen kostet, gegossen werden, um einen Wein

Wein zu erhalten, von welchem die Kanne für 6 Gr. verkauft werden kann.

XIV. Anmerkung.

Ueberhaupt lehrt der XIII. §. zwey Dinge von gegebenem Werthe so vermischen, daß ein gegebener mitlerer Werth heraus kommt. Gesezt, man wollte 10 Mark löthig Silber durch einen Zusatz von 9 löthigen, 13 löthig machen: wie viel Mark des 9 löthigen gehört dazu?

Hier ist $m = 10$ Mark; $a = 15$; $b = 13$ und $c = 9$; Also

$$x = \frac{(15 - 13) \cdot 10}{13 - 9} =$$

$$\frac{2 \cdot 10}{4} = 5 \text{ Mark.}$$

Wären 10 Centner Erzt, wovon der Centner 20 Mark = 320 Loth Silber hielte, durch Erzt, wo der Centner 4 Loth Silber hält, 15 märkigt oder 240 löthig zu machen: so muß man $m = 10$; $a = 320$; $b = 240$ und $c = 4$ setzen; und es wird alsdann $x =$

$$\frac{(320 - 240) \cdot 10}{240 - 4} =$$

$$\frac{80 \cdot 10}{236} = \frac{800}{236} = 3\,\frac{23}{59} \text{ Cent.} =$$

3 Centner, 42 Pf. 28 $\frac{12}{59}$ Loth.

XV. Exempel.

Drey Arbeiter graben in 120 Tagen einen Graben; der erste bekommt täglich 3 Gr. der andere 5 Gr. und der dritte 6 Gr. Es erhält aber einer nach vollbrachter Arbeit so viel wie der andere: Wie viel Tage hat jeder gearbeitet. Man setze daß der erste x Tage gearbeitet hätte; so bekommt er dafür 3 x Groschen; des andern Arbeit aber sey in y Tagen geschehen, so wird er dafür 5 . y Groschen erhalten: Also hätte der dritte 120 — x — y Tage gearbeitet, und bekäme dafür (120 — x — y) 6 Gr. = 720 — 6 x — 6 y Gr. Da nun, wie vorausgesezt, jeder gleich viel erhält; so ist sowohl

$$3x = 5y; \text{ und also } x = \tfrac{5}{3} y$$

als auch

$$5y = 6(120 - x - y).$$

Wird nun hierinne statt x der vorhin gefundene Werth von demselben, $\frac{5}{3}$ y nämlich, gesezt, so erhält man

$$5y = 6(120 - \tfrac{5}{3} y - y) \text{ oder}$$

$$5y = 720 - \tfrac{30}{3} y - 6y =$$

$$720 - 10y - 6y = 720 - 16y; \text{ Also}$$

$$5y + 16y = 720 - 16y + 16y = 720;$$

$$\text{oder } 21y = 720; \text{ und folglich}$$

$$y = \tfrac{720}{21} = 34\tfrac{2}{7}.$$

Diesen Werth $34\frac{2}{7} = \frac{240}{7}$ von y in die Gleichung

$$x = \tfrac{5}{3} y.$$

gesezt

gesezt, giebt

$$x = \frac{5}{3} \times \frac{240}{7} = \frac{400}{7} = 57\frac{1}{7}.$$

Also ist

$$120 - x - y = 120 - 57\frac{1}{7} - 34\frac{2}{7}$$
$$= 120 - 91\frac{3}{7} = 28\frac{4}{7}.$$

Demnach hat gearbeitet

der erste $57\frac{1}{7}$ Tag und erhält $57\frac{1}{7} . 3$ Gr. $= 171\frac{3}{7}$ Gr.
zweyte $34\frac{2}{7}$ - - - $34\frac{2}{7} . 5$ Gr. $= 171\frac{3}{7}$ Gr.
dritte $28\frac{4}{7}$ - - - $28\frac{4}{7} . 6$ Gr. $= 171\frac{3}{7}$ Gr.

XVI. Exempel.

Es hat ein Goldschmid zwo Massen Silber, wovon die eine m löthig, die andere aber n löthig, ist. Er will daraus a Mark b löthigen Silbers machen: Wie viel muß er von jeder nehmen?

Man setze, es wäre von der m löthigen Masse x Mark zu nehmen, von der n löthigen aber y Mark; so muß $x + y = a$ und $mx + ny = ba$, seyn. Aber aus $x + y = a$ wird $x = a - y$; und aus $mx + ny = ba$ wird $ba - ny = mx$; und

$$x = \frac{ba - ny}{m}$$

Folglich

$$a - y = \frac{ba - ny}{m}; \text{ und}$$

$$ma - my = ba - ny; \text{ also}$$
$$ma = ba - ny + my; \text{ und}$$

 ma—

$$m\,a - b\,a = -n\,y + m\,y = m\,y - n\,y = (m - n)\,y; \text{ oder}$$

$$(m - b)\,a = (m - n)\,y; \text{ mithin}$$

$$\frac{(m - b)\,a}{m - n} = y$$

Diesen izt gefundenen Werth von y in die Gleichung $x = a - y$ statt y gesezt, giebt

$$x = a - \frac{(m - b)\,a}{m - n} =$$

$$\frac{a\,(m - n) - (m - b)\,a}{m - n} =$$

$$\frac{a\,m - a\,n - (a\,m - b\,a)}{m - n} =$$

$$\frac{a\,m - a\,n - a\,m + b\,a}{m - n} =$$

$$\frac{-a\,n + b\,a}{m - n} = \frac{b\,a - a\,n}{m - n}$$

$$= \frac{(b - n)\,a}{m - n}$$

Es sey $a = 10$ Mark; $b = 13$, $m = 15$, $n = 9$; so ist

$$x = \frac{(13 - 9) \cdot 10}{15 - 9} = \frac{4 \cdot 10}{6}$$

$$= \tfrac{40}{6} = 6\tfrac{2}{3} \text{ Mark; und}$$

$$y = \frac{(15 -- 13) \cdot 10}{15 - 9} = \frac{2 \cdot 10}{6} = 3\tfrac{1}{3} \text{ Mk.}$$

Also

Also muß man von dem 15 löthigen $6\frac{2}{3}$ Mrk. und von dem 9 löthigen $3\frac{1}{3}$ Mark nehmen: und man erhält $6\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} = 10$ Mark, wie gehörig

XVII. Exempel.

Von zween Haufen Erzt, wovon der Centner des einen 20 Mark oder 320 Loth Silber hält, der Centner des andern aber nur 4 Loth, will man einen dritten von 10 Centner, wo der Centner 15 Mark oder 240 Loth Silber hält, machen: Es frägt sich: wie viel von jedem muß genommen werden?

Hier sind die Formeln in XVI zu gebrauchen: und es ist daher hier $a = 10$; $b = 240$; $m = 320$ und $n = 4$; also $x = \frac{(240 - 4) . 10}{320 - 4} =$

$\frac{236 . 10}{316} = \frac{2360}{316} = 7\frac{37}{79}$ Centner =

7 Centner, 51 Pf. $16\frac{48}{79}$ Loth; nnd

$y = \frac{(320 - 240) . 10}{320 - 4} = \frac{80 . 10}{316} = \frac{800}{316}$

$= 2\frac{24}{79}$ Cent. =

2 Centner, 58 Pf. $15\frac{31}{79}$ Loth.

Also muß man von dem Haufen, wo der Centner 20 Mark Silber hält, 7 Centner, 51 Pfund, $16\frac{48}{79}$ Loth, und von dem, wo der Centner nur 4 Loth Silber im Gehalte kommt, 2 Centner, 58 Pfund, $15\frac{31}{79}$ Loth, nehmen.

XVIII. Exempel.

Wenn man a Centner Erzt, wovon der Centner m Loth Silber hält mit b Centner, wo der Centner mit n Loth Silber im Gehalte kommt, vermischt: so frägt sichs: wie viel Loth Silber der Centner von den gemischten a+b Centnern hält?

Man setze, er halte x Loth Silber; so ist aus der Natur der Sache klar, daß

$$am + bn = (a + b)\, x;$$

Also

$$x = \frac{am + bn}{a + b}$$

Ist $a = 10$; $b = 5$; $m = 4$; $n = 1$; so ist

$$x = \frac{10 \cdot 4 + 5 \cdot 1}{10 + 5} = \frac{40 + 5}{15} = \frac{45}{15} = 3 \text{ Loth.}$$

Die bisherigen Exempel (I-XVIII.) gehören in die Algebra, in die Lehre von einfachen Gleichungen. Und es schien mir nicht überflüßig, Anfängern davon hier etwas beyzubringen.

Erläute-

Erläuterungen der Kästnerischen Arithmetik

III. Capitel.

Die Rechnung mit zehntheiligen und sechzigtheiligen Brüchen.

§. 1.

Z. E. $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{100}$; $\frac{7}{1000}$; $\frac{485}{10000}$; sind zehntheilige, oder Decimalbrüche: denn der Nenner 10 ist die erste Potenz der 10, der Nenner 100 die 2te Potenz, der Nenner 1000 die 3te 2c. Man nennt sie 10theile, wenn der Nenner 10 ist, hunderttheile, wenn er 100 ist, tausendtheile, wenn er 1000 ist 2c.

§. 2.

Aus dem 24. §. des I. Cap. ist klar, fast jede Ziffer einer Zahl durch ihre Stelle noch einen besondern Werth, als den, den sie schon für sich alleine hat, erhält. Jede, gegen die linke Hand folgende Ziffer nämlich hat einen 10mal größern Werth, als sie in der nächst vorhergehenden Stelle würde gehabt haben: Also nehmen die Einheiten von der Linken nach der Rechten zu 10fach ab, so wie sie umgekehrt von der Rechten nach der Linken

10fach zunehmen. Daher ist, z. E. bey der Zahl 5872, die Einheit der 8, zehnmal kleiner als die Einheit der 5; desgleichen die Einheit der 7 zehnmal kleiner als der 8, und die der 2 zehnmal kleiner als der 7; Stünden nun nach der 2, als den Einern, noch mehrere Ziffern, z. E. 3469, so daß sie mit den erstern 5872, in einer Reihe nach der Rechten zu, zu stehen kämen, wie

5872 3469;

so muß, nach eben den izt erwehnten Gesetze der decadischen Arithmetik, die Einheit der 3, 10mal kleiner seyn, als die Einheit der 2; Aber die Einheit der 2, ist $= 1$; folglich muß hier die Einheit der 3, $= \frac{1}{10}$ seyn, und also die 3 in diesem Fall $\frac{3}{10}$ bedeuten. Ferner ist die Einheit der 4; 10mal kleiner als die Einheit der 3, also ist sie $= \frac{1}{10}$. $: 10 = \frac{1}{10.10} = \frac{1}{100}$ und die 4, muß folglich hier so viel als $\frac{4}{100}$ seyn: Aus eben den Gründen ist hier die 6, $= \frac{6}{1000}$, und die 9, $= \frac{9}{10000}$. Es bedeutet demnach eine Ziffer, (wie hier die 3) die der Stelle der Einer zunächst zur rechten Hand stehet, zehntheile; die Ziffer, (wie hier die 4) die

der

der Ziffer, die zehntheile bedeutet, zunächst zur rechten Hand stehet, hundertheile u. s. f. Oder: in der ersten Stelle zur Rechten nach den Einern, stehen die zehntheile, in der 2ten die Hundert-theile, in der 3ten die tausendtheile, in der 4ten die zehntausendtheile u. s. w. Also bedeutet jede Ziffer in den Stellen zur Rechten nach den Einern, einen Bruch, dessen Zähler die Ziffer anzeigt, und dessen Nenner eine Potenz der 10 ist, wo ihr Exponente so viel Einheiten hat, als die Zahl, welche anzeigt, die wie vielte Stelle die Stelle der Ziffer, von der Stelle der Einer ist. „Oder, (welches eben das ist,) der Nenner ist eine 1 mit so viel Nullen, als die Zahl Einheiten hat, welche anzeigt, die wie vielte die Ziffer von der Stelle der Einer ist". In unserm Exempel bedeutet die 6 den Bruch $\frac{6}{1000}$, dessen Zähler die 6 selbst, und der Nenner 1000 die 3te Potenz der 10ne ist. Der Exponente dieser Potenz ist 3, und die 6 steht von der Stelle der Einer nach der Rechten zu, in der 3ten Stelle. Oder, welches einerley ist, der Nenner 1000 ist eine 1 mit 3 Nullen: und die 6 ist, von der Stelle der Einer, die 3te Ziffer.

Man sieht also, daß es nothwendig ist, zwischen der Stelle der Einer und Zehntheile ein Zeichen zu machen, davon unser Herr Autor sagt: „dazu ich ein , (nämlich Comma) gebrauchen will, andere brauchen auch einen . (nämlich Punct)".

Demnach wird nun 5872 3469 so aussehen:

5872, 3469

und heißen:

5872 Einer, oder, wie man auch ofte sagt, 5872 Ganze 3469 Zehntausendtheile;

Nach der gemeinen Bruchart ausgedrückt würde

$$5872,3469 = 5872\,\frac{3469}{10000} = 5872 + \frac{3469}{10000};$$ und also auch $$= 5872 + \frac{3000 + 400 + 60 + 9}{10000} = 5872 + \frac{3000}{10000} + \frac{400}{10000} + \frac{60}{10000} + \frac{9}{10000} = 5872 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{9}{10000}$$ seyn.

„Hat man keine Zahl in der Stelle der Einer anzuzeigen, so muß man dahin eine Null (0) schreiben.“ Daher schreibt man z. E. $\frac{347}{1000} = \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000}$ (welches die Brüche im Exempel des 1. §. sind,) so: 0, 347. Dergleichen Art der Bezeichnung ist viel bequemer, als die gewöhn-

wöhnliche Bruchbezeichnung: und daher auch in der Mathematik beybehalten worden.

Oft kommen auch solche Brüche vor, die sich von den bisherigen nur durch die ihres Zählers kleinern Menge Ziffern als ihr Nenner Nullen hat, unterscheiden. Bey diesen könnte es scheinen, als wenn obige Art der + ~~Berechnung~~ bey ihnen nicht anzubringen wäre; Aber man wird gleich sehen, daß sie bey solchen Brüchen ebenfalls auch Statt findet. Da eine auf gewöhnliche Art geschriebene ganze Zahl, nicht geändert wird, wenn man an ihr, grade so viel Nullen als man will, setzet. So ist 00084 = 84; Deswegen kann man dem Zähler eines Bruchs von dieser Art $\frac{84}{100000}$ allezeit so viel Nullen zur Linken beyfügen, daß die Anzahl der Nullen und Ziffern zusammengenommen der Anzahl der Nullen im Nenner gleich werde. Daher ist $\frac{84}{100000} = \frac{00084}{100000} = 0,00084$: Also wird überhaupt die niedrigste Ziffer des Zählers von der Stelle der Einer um so viel Stellen weggzurücken seyn, als der Nenner Nullen enthält. Daher ist z. E.

$$\frac{8}{10000000} = 0,0000008$$

und $\frac{107005}{100000000} = 0,00107005$.

+ Bezeichnung

Ob.

Obgleich eine ganze Zahl geändert wird, wenn an ihr rechter Hand Nullen angehangen werden, so geschiehet dies doch nicht, wenn die Stelle der Einer durch ein Zeichen, durch das gewöhnliche, festgesezt wird, daß dies allemal die Stelle der Einer bleiben soll. Denn wenn man nun rechter Hand eine, oder mehrere Nullen hinzu sezt, so ist es eben so gut, als wenn man zwar hierdurch mit 10, oder 100 u. s. w. multiplicirt, aber auch zugleich mit eben der Zahl wieder dividirt, hätte. Es ist demnach z. E. $364,000 = \frac{364000}{1000} = 364$;

$0,96 = 0,960000 = \frac{96}{100} = \frac{960000}{1000000}$; und

$0,0013 = 0,00130000000 = \frac{13}{10000} = \frac{130000000}{100000000000}$. Den Gebrauch dieser leztern Betrachtung zeigt die Folge.

§. 3.

Wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ in einem Decimalbruch verwandelt werden soll, so weiß man, daß ein Bruch heraus kommen muß, dessen Nenner eine Potenz der Zehne ist, deren Exponente so viel Einheiten hat, als im Zähler Ziffern vorhanden sind, oder auf so viel Ziffern man den zehntheiligen Bruch suchen will. Es ist also der Nenner dieses Decimalbruchs, aber nicht der Zähler, bekannt. Es

sey

sey daher der Exponente dieser Potenz der 10 = n, und der Zähler = x; so ist $\frac{x}{10^n} = \frac{a}{b}$; Also

$$x = \frac{a \cdot 10^n}{b}$$

Es sey $\frac{a}{b} = \frac{5}{8}$; n = 3, so ist $x = \frac{5 \times 10^3}{8}$ $= \frac{5 \cdot 1000}{8} = \frac{5000}{8} = 0,625$

§. 5.

Den Bruch $\frac{1}{3}$ kann man nicht genau durch einen zehntheiligen ausdrücken. Denn man kann $\frac{1}{3}$ durch 0, 333; oder durch 0, 3333 oder durch 0, 33333, oder durch 0, 333333333, u. s. w. ausdrücken: Aber in dem Ausdrucke $\frac{1}{3}$ = 0,3333.... kommt man dem wahren Werthe von $\frac{1}{3}$ näher als in 0, 333.... und 0, 33333.. kommt ihn noch näher als 0, 3333... Um wie viel man aber von dem wahren Werthe entfernet ist, findet man so:

Da $\frac{1}{3}$ um eine gewisse uns unbekannte Größe größer ist, als 0, 33333... so sey dieselbe = x; und es ist daher $\frac{1}{3} = 0,33333 + x = \frac{33333}{100000}$ + x; folglich

$$x = \frac{1}{3} - \frac{33333}{100000} = \frac{100000 - 99999}{300000} =$$

$\frac{1}{300000}$: Mithin ist . $\frac{1}{3}$ um $\frac{1}{300000}$ größer, als 0, 33333: daher kommt es, daß, wenn es durch den Decimalbruch 0, 3333333333 ausgedruckt wird, nur um $\frac{1}{30000000000}$ größer ist, als

$$0,3333333333 = \frac{3333333333}{10000000000}.$$

Wenn man $\frac{3}{7}$ in einem Decimalbruch verwandeln will, so ist $\frac{3,000000000000000000}{7} =$

$$0,428571428571428571 \ldots\ldots = \tfrac{3}{7}.$$

Man wird aber bey dieser Arbeit bemerken, daß man erstlich die Ziffern 428571 dann wieder die nämlichen, und dann wieder eben dieselben, erhält: und dividirte man, so weit man will, fort, so würde dies gleichfalls noch erfolgen: Es läßt sich also zwar $\frac{3}{7}$ nicht genau in einem Decimalbruch ausdrücken; aber man kann sich doch dadurch dem wahren Werthe von $\frac{3}{7}$ so weit man will, nähern, wenn man nur 428571 in eine Reihe, so ofte man will, hinschreibet, wie

$$0,428571428571428571428571428571428571$$

welcher Decimalbruch gewiß sehr wenig von $\frac{3}{7}$ unterschieden seyn wird: denn dieser Unterschied =

$$\tfrac{3}{7} - \frac{428571428571428571428571428571428571}{10^{35}}$$

$$= \frac{1}{7 \cdot 10^{35}} =$$

$$\frac{1}{700000000000000000000000000000000000}$$

(§. 5. und dessen Erl.); gewiß unbeträchtlich.

Es giebt mehrere Brüche dieser Art; und bey denen findet ebenfalls auch diese Betrachtung statt.

§. 6.

Z. E. $0,367 = \frac{367}{1000} = \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{1}{1000}$

$= \frac{3}{10^1} + \frac{6}{10^2} + \frac{7}{10^3} = 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 6 \cdot \frac{1}{10^2} + 7 \cdot$

$\frac{1}{10^3}$. Aber nach dem 12. §. des II. Cap. ist $\frac{1}{10^1}$

$= 10^{-1}$; $\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$; $\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$; Folglich

$3 \cdot \frac{1}{10^1} + 6 \cdot \frac{1}{10^2} + 7 \cdot \frac{1}{10^3} = 3 \cdot 10^{-1} +$

$6 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$.

Also $0,367 = 3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$.

Mithin kann man in 0, 367, die Ziffern 3, 6, 7, als schlechte Einer ansehen, davon die 3 in die Potenz 10 dessen Exponent — 1 ist, die 6 in die Potenz 10, der der Exponente — 2 zukommt, und die 7 in die Potenz der 10, die zum Exponenten — 3 hat, multiplicirt ist.

Das

Das Exempel im Buche erklärt sich nun so: $532,6417 = 532 + 0,6417$; aber $532 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot$ (I. Cap. §. 51.) $= 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ (II. Cap. §. 11.) und $0,6417 = 6 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4}$. Also ꝛc. (S. Buch)

§. 9.

Im 3. §. des I. Cap. ist bewiesen worden, daß wenn man z. E. 300 mit 50000 d. i. $\overset{2}{3}$ mit $\overset{4}{5}$ multiplicirt, das Product $= \overset{6}{15}$ sey, d. i. der Exponente 6 der niedrigsten Ziffer des Products, ist gleich der Summe der Exponenten 2 und 4 der Factoren. Da nun also dieses für ganze Zahlen, bewiesen ist, so darf daher der Beweis nur für Decimalbrüche geführt werden, wie im Buche mit der größten Allgemeinheit geschehen ist. Um aber die Sache mit Exempeln zu erläutern, so sey 300 mit 0,000005 d. i. $\overset{2}{3}$ mit $\overset{-6}{5}$ zu multipliciren, und es wird das Product $\overset{2}{3} \times \overset{-6}{5} = 3 \cdot 10^2 \times 5 \cdot 10^{-6}$ (§. 7. und 6.) $= 3 \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ (II. Cap. §. 13) $= 15 \cdot 10^{-4} = 15^{-4}$ (§. 7.) $= 0,0015$ (§. 7.) seyn.

Wäre aber 0,0005 mit 0,0000009 d. i. 5^{-4} mit 9^{-7} zu multipliciren, so würde das Product $9^{-7} \times 5^{-4} = 9 \cdot 10^{-7} \times 5 \cdot 10^{-4} = 9 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4} = 9 \cdot 5 \cdot 10^{-11} = 45 \cdot 10^{-11} = 45^{-11} = 0,00000000045$ seyn. Aus eben dem Grunde ist

ist z. E. $\left(\overset{-4}{5}\right)^2 = \overset{-4}{5} \times \overset{-4}{5} = 5 \cdot \overset{-4}{10} \times 5 \cdot \overset{-4}{10} =$
$5 \cdot 5 \cdot \overset{-4}{10} \cdot \overset{-4}{10} = 5^2 \cdot \overset{-2 \cdot 4}{10} = 25 \cdot \overset{-8}{10} = \overset{-8}{25} =$
0, 00000025 und $\left(\overset{-4}{5}\right)^3 = \overset{-4}{5} \times \overset{-4}{5} \times \overset{-4}{5} =$
$5 \cdot 10^{-4} \times 5 \cdot 10^{-4} \times 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot$
$10^{-4} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4} = 5^3 \times 10^{-3 \cdot 4} = 5^3 \times$
$10^{-12} = 125 \cdot 10^{-12} = \overset{-12}{125} =$
0,000000000125.

§. 11.

Wenn m = + 6 rc.

Es sey also m = + 6; n = + 9; Aber a = 12 und b = 3, wie vorhin; so ist $\overset{+6}{12} : \overset{+9}{3} = 12 \cdot 10^6 : 3 \cdot 10^9 = \frac{12 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^9} = \frac{12}{3} \cdot \frac{10^6}{10^9} = \frac{12}{3} \cdot 10^{6-9} = 4 \cdot 10^{6-9} = 4 \cdot \overset{-3}{10} = \overset{-3}{4} = 0,004$; Oder da $\overset{+6}{12} = 12000000$ und $\overset{+9}{3} = 3000000000$; so ist $\overset{+6}{12} : \overset{+9}{3} = 12000000 : 3000000000 = 12 : 3000 = \frac{12}{3000} = \frac{12}{3 \cdot 1000} = \frac{12 \cdot 1}{3 \cdot 1000} = \frac{12}{3} \cdot \frac{1}{1000} = 4 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{4}{1000} = 0,004$ wie gehörig.

Ist a immer noch = 12, so wie b = 3, aber m = — 3 und n = + 2 so steht die 2 von der 12 in der — 3 Ordnung, und man hat daher

$\overset{-3}{12}$ durch $\overset{+2}{3}$ oder 0, 012 durch 300 zu dividiren: und der Quotiente $\overset{-3}{12} : \overset{+2}{3} = 0,012 : 300$ wird seyn $= 12 \cdot 10^{-3} : 3 \cdot 10^{2} = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{2}} =$ $\frac{12}{3} \cdot \frac{10^{-3}}{10^{2}} = 4 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{2}} = 4 \cdot 10^{-3-2} =$ $4 \cdot 10^{-5} = \overset{-5}{4} = 0,00004.$

Ist $m = -3$; $n = -4$ aber $a = 12$ so wie $b = 3$ wie vorher, so ist die 2 der 12 aus der -3 Ordnung und die 3 aus der -4ten: daher ist $\overset{-3}{12} : \overset{-4}{3} = 0,012 : 0,0003, = 12 \cdot 10^{-3} : 3 \cdot 10^{-4} = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-4}} = \frac{12}{3} \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-4}}$ $= 4 \cdot 10^{-3-(-4)} = 4 \cdot 10^{-3+4} = 4 \cdot 10^{1}$ $= 40.$

Für $0,03 : 0,00007$ ist $a = 3$, $b = 7$, $m = -2$, $n = -5$; und also der Quotiente $0,03 : 0,00007 = 3 \cdot 10^{-2} : 7 \cdot 10^{-5} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 10^{-5}}$ $= \frac{3}{7} \cdot \frac{10^{-2}}{10^{-5}} = 0,4285$ ꝛc. $\times \frac{10^{-2}}{10^{-5}} =$ $0,4285 \ldots \times 10^{-2-(-5)} = 0,4285 \ldots \times 10^{-2+5} = 0,4285 \ldots \times 10^{3} = 0,4285 \ldots \times 1000 = \frac{4285 \ldots}{10000} \times 1000 =$

4285

$$\frac{4285\ldots \times 1000}{10000} = \frac{4285\ldots \times 1000}{10 \,.\, 1000} =$$

$$\frac{4285\ldots}{10} \times \frac{1000}{1000} = \frac{4285\ldots\ldots}{10} = 428,5\ldots$$

Wenn man also Decimalbrüche mit Decimalbrüche, oder eine ganze Zahl mit einem Decimalbruche oder umgekehrt, dividirt, so erhält man die Anzahl der Decimalstellen des Quotienten, wenn man die Anzahl der Decimalstellen des Divisors, von der Anzahl der Decimalstellen des Dividendus, abzieht.

§. 12.

Um Decimalbrüche mit oder ohne Ganze zu addiren oder von einander zu subtrahiren, schreibt man sie dermaßen hin, daß die Einer und dadurch alle Ziffern von gleicher Ordnung gerade unter einander zu stehen kommen. Das übrige verrichtet man, wie mit ganzen Zahlen. Das Zeichen (,) oder (.) bleibt bey der Summe oder der Differenz der Einer, stehen.

Es soll addirt werden

$\frac{3}{7} = 0,42857\ldots$
$\frac{4}{7} = 0,57142\ldots$

$1 = 0,99999\ldots$

In diesem Exempel ~~kömme~~ Einer also zur Summe $1 = 0,99999\ldots$ heraus, welches nicht wahr zu seyn scheint, weil $1 = 1,00000$ und nicht =

0, 99999 ist. Aber da sich $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{7}$ nicht genau im Decimalbruche ausdrucken lassen: und man also Decimalbrüche addirt hat, die $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{7}$ nicht in seinem wahren Werth, sondern ihn nur beynahe ausdrücken; so hat man daher zur Summe auch einen Decimalbruch der die 1 nicht genau, sondern nur beynahe, ausdruckt, erhalten.

Man sieht leicht, daß hier noch $\frac{1}{100000}$ = 0, 00001 zu 0, 99999 kommen müßte, um 1, 00000 zu werden. Drückt man $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{7}$ durch mehrere Decimalstellen als wie vorhin geschehen, aus, so wird sich auch die Summe dieser Decimalbrüche dem wahren Werthe der 1 mehr als wie vorher, nähern, und ihr also zur 1 weniger als vorhin fehlen. Ist also

$\frac{3}{7}$ = 0, 428571428571 4....

$\frac{4}{7}$ = 0, 5714285714285 ....; so kommt nun

1 = 0, 9999999999999....; und

beyde sind nur um $\frac{1}{10000000000000}$ unterschieden, welcher Unterschied gewiß sehr wenig beträchtlich, und weit weniger als vorher, ist.

Ist

0, 5872
394, 68724
9, 085
12, 74423 zu addiren, so ist die

Sum. 417, 10367

Es

Es sey ferner von

$$\frac{2}{3} = 0,6666\ldots$$
$$-\ \frac{1}{3} = 0,3333\ldots \text{ zu subtrahiren.}$$

Die Diff. ist $\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$

Ist endlich von

678, 905
12, 341 zu subtrahiren, so kommt zur

Diff. 666, 564

Das Multipliciren und Dividiren der Decimalbrüche, geschiehet, wie bey ganzen Zahlen, nur muß man sich bey Bestimmung der Ganzen, im Producte nach dem 9. §., im Quotienten aber nach dem 11. §., richten.

Es sey 8, 34 mit 14 zu multipliciren, wie folget:

```
   8, 34
      14
 -------
    3336
    834
 -------
 116, 76
```

Hier hat man wie mit ganzen Zahlen multiplicirt, ohne daß man sich erst um die im Product zu erhaltende Ganzen bekümmerte. Um aber diese in dem Producte zu bestimmen, so sezt man (nach 9) das Zeichen (,) der Einer dergestalt, daß hinter ihm so viel Decimalstellen folgen, als in

beyden Factoren zusammen vorhanden sind. Hier im Exempel sind im Multiplicando 2 Decimalstellen im Multiplicator aber keine, folglich zählt man im Product 116, 76 von der rechten nach der linken Hand, zwey Ziffern, ehe man das Comma sezt.

Fernere Exempel

```
   18, 42
    5, 91
 --------
   18 42
  16578
  9210
 --------
 108, 8622
```

Da in diesem Exempel sowohl im Multiplicando als Multiplicator 2 Decimalstellen vorhanden sind, so muß das Product 4 Decimalstellen erhalten.

```
            0, 000142
           0,00000086
        --------------
                  852
                 1136
  --------------------
   0, 00000000012212
```

In diesem Exempel sind im Multiplicandum 6 Decimalstellen und im Multiplicator 8, vorhanden: daher müssen 14 derselben ins Product kommen; obgleich nur 5 geltende Ziffern darinnen sich befinden: Man hat daher linker Hand noch 9 Nullen

len gesezt, und überdies noch eine für die Stelle der Einer.

Exempel zum Dividiren:

Divis.	Divid.	Quot.
16	37, 44	2, 34
	32	
	5, 4	
	4 8	
	64	
	64	
	0	

Man hat hier nicht anders, als wie wenn man 16 in 3744 zu dividiren hätte, verfahren: nur hat man (nach 11) im Quotienten die Stelle der Einer bestimmt, indem man wußte, daß im Dividendo, 2 Decimalstellen, im Divisor aber gar keine war: und daher im Quotienten zwey Decimalstellen kommen mußten.

Das Divisionsexempel im Buche ist so zu verstehen: Es soll 0,625 in 1,6 oder, welches einerley ist, in 1,600 dividirt werden: dividirt man nun 625 in 1600, so erhält man im Quotienten 2, es bleibt aber der Rest 350: und es wäre so nach der wahre Quotiente $2\frac{350}{625}$; Aber der Bruch $\frac{350}{625}$ als Decimalbruch ausgedrückt, giebt

0, 56, und daher wäre nun der wahre Quotiente 2, 56: Eben dies hätte man auch erhalten, wenn man so, wie im Buche, verfahren hätte: Nämlich an den Rest 350 ist eine Null gehängt worden, welches eben so viel ist, als hätte sie schon im Dividendo gestanden, und wäre nur zu diesen Rest herunter genommen worden: durch dieses Verfahren hat man nun 3500 erhalten: welches durch 625 dividirt im Quotienten 5, und zum Reste 375, giebt. Wenn man an diesen Rest wieder eine Null hängt, so ist dies ebenfalls auch so viel, als wenn sie schon im Dividendo gestanden hätte und wäre nur zum Rest 375 herunter genommen worden: Hierdurch aber erhält man 3750 durch 625 zu dividiren. Indem man nun dieses thut, so kommt im Quotienten 6, und zum Rest 0; die Ziffern des Quotienten wären also 256. Um aber die Ganzen dieses Quotienten zu bestimmen, so weiß man, daß im Dividendo erst drey Decimalstellen waren, aber durch Anfügung der Nullen an beyde Reste sind 2 Decimalstellen im Dividendo mehr worden: folglich sind in demselben nun 5 Decimalstellen vorhanden; da sich aber im Divisor 3 derselben befinden; so kommen (nach 11) im Quotienten 2 Decimalstellen. Also ist der Quotiente 2, 56, oder 1, 6 : 0, 625 = 1, 600 : 0, 625 = 1, 60000 : 0, 625 = 2, 56.

Allemal wenn im Dividiren ein Rest bleibt, kann man dieses Verfahren anbringen: Aber bey

vie-

vielen Fällen geht die Division nicht auf, sondern es bleibt immer ein Rest, so weit man auch fort dividirt: In solchen Fällen also findet man den Quotienten nie ganz genau; aber auf je mehr Decimalstellen man den Quotienten berechnet desto genauer erhält man ihn, und desto unbeträchtlicher wird der Rest, als der Zähler des noch am Quotienten zu hängenden Bruchs, so, daß man ihn, seiner Unbeträchtlichkeit wegen, in der Ausübung aus der Acht lassen kann.

Folgendes Exempel wird von der Art seyn:

```
Divis.  Divid.        Quot.
2, 13 | 6, 428 | 3, 01784037558676
      | 6, 39  |
      ----------
          380
          213
          ----
          1670
          1491
          ----
           1790
           1704
           ----
             860
             852
             ----
              800
              639
              ----
              1610
              1491
              ----
               1190
               1065
               ----
                1250
                1065
                ----
                 1850
                 1704
                 ----
                  1460
                  1278
                  ----
                   1620
                   1491
                   ----
                    1290
                    1278
                    ----
                      12
```

Hier

Hier ist der Quotiente auf 14 Decimalstellen berechnet; und man kann also in der Ausübung den Rest 12, als Null ansehen: denn es fehlt eigentlich zum wahren Quotienten nur $\frac{12}{21300000000000000}$. Dies sieht man leicht ein, wenn man die Sache so betrachtet:

$$6,428 : 2,13 = 6,42800000000000000 : 2,13$$

$$= \frac{6\,42800000000000000}{10000000000000000} : \frac{213}{100} =$$

$$\frac{6\,42800000000000000 \,.\, 100}{10000000000000000 \,.\, 213} =$$

$$\frac{6\,42800000000000000}{100000000000000 \,.\, 213} = \text{(weil}$$

$$100000000000000 = 10^{14})$$

$$\frac{6\,42800000000000000}{10^{14} \,.\, 213} =$$

$$\frac{1 \,.\, 6\,42800000000000000}{10^{14} \,.\, 213} = \frac{1}{10^{14}} \times$$

$$\frac{6\,42800000000000000}{213} = \frac{1}{10^{14}} \times$$

$$6\,42800000000000000 : 213 =$$

$$\frac{6\,42800000000000000 : 213}{10^{14}} =$$

$$\frac{301784037558676\frac{12}{213}}{10^{14}} =$$

$$\frac{3017840375586676\frac{12}{213}}{10000000000000000} = 3,017840375586676\frac{12}{2130000000000000000}$$

Welcher Bruch in der Ausübung gewiß in gar keine Betrachtung zu ziehen ist.

§. 13.

Die Ziffern des .... stehen,

die Ziffern der einzeln Producte also, die in der Ordnung — 6 und den größern verneinenden Ordnungen unter einander stehen.

.. in die linker Hand stehenden Ziffern ....

in] die] nach der Ordnung — 6 im Product linker Hand stehenden Ziffern

ließe .... 7 werden.

Liesse man in den einzeln Producten die Ziffern von der Ordnung — 6 weg; so würde die Ziffer von der Ordnung — 5 im Product (nämlich in 0,999995238 1) nicht 9 sondern 7 werden, weil die Summe der Ziffern von der Ordnung — 5 in den einzeln Producten, 27 ist.

So würde es, wie man leicht sieht, vergeblich seyn, die nach der 6ten Decimalstelle folgenden Ziffern in den einzeln Producten hinzuschreiben. Wenn man daher gleich rechter Hand der 2 in dem ersten einzelnen Producte gerade herunter einen Strich zieht, so werden dadurch von den übri-

gen

gen die Ziffern abgesondert, die man füglich weglassen kann, dadurch aber bekommt man zum Producte, 0, 999995, welches hier bis auf die 6te Decimalstelle richtig ist. Dieses Product wird man gleichfalls so weit richtig erhalten, wenn man den Multiplicandum und Multiplicator bis auf die Ordnung — 5, nimmt, und die einzeln Producte bis auf die — 6 Ordnung berechnet, indem man mit jeder nächstfolgenden Ziffer des Multiplicators nach den Zehntheilen eine Ziffer weniger im Multiplicando als mit der gleich vorhergehenden, multiplicirt. Dies Verfahren heißt die **abgekürzte Multiplication**; und das Exempel im Buche nach ihr berechnet, sieht so aus:

2, 33333
0, 42857
____
0, 933332 (= 4 × 2, 33333)
46666 (= 2 × 2, 3333)
18666 (= 8 × 2, 333)
1166 (= 5 × 2, 33)
163 (= 7 × 2, 3)
____
0, 999993

§. 14.

Bey der **abgekürzten Division**, nimmt man, wenn man die erste Ziffer des Quotienten, (wie im Exempel die 3,) sucht, den Divisor ganz und verfährt wie gewöhnlich, bey der 2ten Operation, wo man nämlich die 2te Ziffer des Quotienten (im Exempel die 1) sucht, läßt man die lezte Ziffer des

des Divisors, (im Exempel die 6) weg, und verfährt wie gewöhnlich. Bey der 3ten, 4ten u. s. w. Operation läßt man die zwo, drey u. s. f. lezten Ziffern des Divisors (im Exempel 26; 926; u. s. w.) weg, und braucht übrigens das gewöhnliche Verfahren. Dabey erhält man die zwey lezten Ziffern, oft auch nur die lezte, des Quotienten zu groß, weil der Divisor nach und nach immer kleiner angenommen wird. Das Verfahren beruht darauf, daß man bey Berechnung der einzelnen Producte aus dem Divisor nach und nach immer die lezte Ziffer wegläßt, und daher das Dividendum als ein aus dem Quotienten und Divisor durch die abgekürzte Multiplication entstandenes Product ansehen kann.

§. 15.

Aus dieser Erklärung ergiebt sich, daß die Nenner der sechzigtheiligen oder Sexagesimalbrüche, Potenzen der 60 sind. Denn wenn man ein Ganzes in 60 gleiche Theile theilet, so ist ein Theil davon $= \frac{1}{60}$ und theilt man diesen wieder in 60 gleiche Theile, so erhält man $\frac{1}{60} : 60 = \frac{1}{60 \cdot 60}$ $= \frac{1}{60^2}$ und diesen Theil ebenfalls wieder in 60 gleiche Theile getheilt, giebt $\frac{1}{60^2} : 60 = \frac{1}{60^2 \cdot 60}$ $= \frac{1}{60^3}$; u. s. w.

Diese

Diese Sexagesimaleintheilung braucht man nicht nur bey Messung der Winkel, wo ein Grad 60 Minuten, jede Minute, 60 Secunden, jede Secunde 60 Tertien, u. s. f. enthält, sondern auch im gemeinen Leben bey Abmessung der Zeit, wo wie beyn Winkeln jede Stunde in 60 Minuten, jede Minute in 60 Secunden, und s. w. eingetheilt wird.

Also sind die Minuten, Secunden, Tertien ꝛc. sechzigtheilige Brüche der Grade oder Stunden, nachdem man Winkel oder Zeit vor sich hat.

§. 16.

3 Stunden $40^{I}\ 12^{II}\ 07^{III}$ spricht man mit Worten so aus: 3 Stunden, 40 Minuten, 12 Secunden, und 7 Tertien; indem über die Zahl der Minuten das Zeichen (^{I}), über die Zahl der Secunden (^{II}), der Tertien (^{III}), drr Quarten (^{IV}) ꝛc. zu schreiben gewöhnlich ist. Da nun aber (nach §. 15. und dessen Erl.) die Minuten, Secunden ꝛc. sechzigtheilige Brüche der Stunden sind, daß also 1 Minute $= \frac{1}{60}$ St.; 1 Sec. = 60 Min. $= \frac{1}{60.60}$ St.; 1 Tertie $= \frac{1}{60}$ Sec. $= \frac{1}{60.60.}$ Min. $= \frac{1}{60.60.60}$ St. u. s. w., ist; so ist 3 Stunden $40^{I}12^{II}07^{III}$ = 3 Stunden

+40

$+ \frac{40}{60}$ St. $+ \frac{12}{60.60}$ St. $+ \frac{7}{60.60.60}$ Stunden; und also hier die Stunde die Einheit.

Bey dergleichen in der Rechnung mit sechzigtheiligen Brüchen, vorkommende Ausdrücke, wie

$$\overset{+2}{08}\ \overset{+1}{04}\ \overset{0}{03}\ \overset{-1}{40}\ \overset{-2}{12}\ \overset{-3}{07}\ \ldots$$

im Buche zeigen die kleinen Ziffern, die Sexagesimalordnungen an. So zeiget + 2 an, daß 08 in der 2ten positiven Sexagesimalordnung steht, oder daß es 8 Schocke von Schocken sind; + 1, daß 04 in der ersten positiven Sexagesimalordnung sich findet, oder daß es 4 Schocke sind; 0, daß in der 0ten Sexagesimalordnung 03 vorhanden, oder daß 03, so viel als 3 Einer ist; — 1, daß die 40 in der ersten negativen Sexagesimalordnung steht, oder daß es $\frac{40}{60}$ sind; — 2, daß 12 sich in der zweyten negativen Sexagesimalordnung befindet, oder daß es $\frac{12}{60^2}$ sind ꝛc.

§. 17.

So kann man in

$$\overset{+2}{08}\ \overset{+1}{04}\ \overset{0}{03}\ \overset{-1}{40}\ \overset{-2}{12}\ \overset{-3}{07},$$

08 ansehen, als wäre 08 in 60^2, und 12, als wäre in 60^{-2}, multiplicirt.

Wenn

Wenn man aber Sexagesimalbrüche zu addiren hat, so sieht man leicht, daß man sie

1) unter einander setzen muß, wie erfodert wird, wenn die Theile von einerley Ordnung in eine Columne kommen sollen; daß man hierauf

2) die niedrigste Columne zu addiren, ihre Summe durch 60 zu dividiren, den Quotienten in Gedanken, damit er zur nächst höhern Columne gerechnet werden kann, zu behalten, und den Rest unter diese Columne zu setzen hat; daß man

3) mit der Summe der nächst höhern Columne, nachdem das, was in Gedanken geblieben war, dazu gerechnet ist, auf eben die Art verfahren, und dieses Verfahren durch alle Columnen bis zur höchsten fortsetzen, muß.

Auf diese Art erhält man die ganze Summe.

Exempel.

+1	0	—1	—2	
34	05	18	23	
18	12	54	14	
52	17	72	37	
		60		
52	18	12	37	Summe

Sexagesimalbrüche zu subtrahiren.

Hat man sie, wie vorhin bey der Addition unter einander gesezt, so fange man die Subtraction

 bey

bey der niedrigsten Columne an, und gehe von jeder Columne zur nächst höhern fort. Ist das, was man subtrahiren soll, größer als die obenstehende Zahl, so borge man eins aus der nächst höhern Ordnung, wodurch die nächst niedrige um 60 vermehrt wird. Steht in einer Ordnung 00, und soll daraus borgen, so borge man drüber weg: und man erhält in dieser Ordnung statt 00 nun 59; ꝛc.

Exempel.

+I	0	—I	—2	
.	60.	60		
34	05	18	23	
18	12	54	14	
15	52	24	9	Diff.

0	—I	—2	—3	—4	—5	
.	59	59	60.	59	60	
27	00	00	13	00	33	
18	29	17	26	14	43	
8	30	42	46	45	50	Diff.

Sexagesimalbrüche in einander zu multipliciren.

I. Fall. Wenn beyde Factoren einfach sind, so multiplicirt man sie mit einander und addirt ihre Exponenten: die Summe wird der Exponent des Products (7. §. des II. Capitels.)

Ist das Product größer als 60, so dividirt man es, sezt den Rest in eben die Ordnung des Products, den Quotienten aber in die nächst höhere.

Exem-

Exempel.

$$\overset{-2}{05} \times \overset{-3}{06} = \overset{-5}{30};$$

$$\overset{-1}{14} \times \overset{+3}{85} = \overset{+2}{1190} = \overset{+3}{19}\ \overset{+2}{50}$$

Das Product $\overset{-1}{14} \cdot \overset{+3}{85} = \overset{+2}{1190}$ hat zur Einheit 60^2 und enthält daher 1190 Schocke von Schocken: dividirt man es mit 60, so bekommt man 19mal die Einheit 60^3 und 50mal die Einheit 60^2; d. i. man erhält 19 Schocke der Schocke von Schocken und 50 Schocke von Schocken. Man kann sich auch von der Richtigkeit der Sache leicht überzeigen, wenn man sich der gewöhnlichen Ausdrücke bedient.

Im ersten Exempel ist $\overset{-2}{05} = \frac{5}{60^2}$ und $\overset{-3}{06} = \frac{6}{60^3}$; folglich $\overset{-2}{05} \times \overset{-3}{06} = \frac{5}{60^2} \times \frac{6}{60^3} = \frac{30}{60^5} = 30 \cdot 60^{-5} = \overset{-5}{30}$; und im 2ten Exempel ist $\overset{-1}{14} = \frac{14}{60}$; $\overset{+3}{85} = 85 \cdot 60^3$; Also $\overset{-1}{14} \times \overset{+3}{85} = \frac{14}{60} \times 85 \cdot 60^3 = 14 \cdot 85 \cdot 60^2 = 1190 \cdot 60^2 = \overset{+2}{1190}$.

II. Fall. Wenn das Multiplicandum aus mehrern Theilen besteht, der Multiplicator aber ein-

fach ist, so wird der leztere in jedem Theil des Multiplicandums multiplicirt, dabey aber wegen der Exponenten eben die Regel die im ersten Falle deshalben ist gegeben worden, beobachtet.

Jedes Partialproduct das größer als 60 ist, wird durch 60 dividirt, der Rest in eben die Ordnung, woraus das Partialproduct ist, gesezt, und der Quotient zum Product der nächst höhern Ordnung gerechnet.

Exempel.

0	—1	—2	—3	—4		
18	16	12	17	04		
				—3		
				21		
		—3	—4	—5	—6	—7
		383	346	255	358	84
		360	300	240	300	60
	—2	—3	—4	—5	—6	—7
	06	23	40	15	58	24

III. **Fall.** Wenn beyde Factoren aus mehrern Theilen bestehn, so multiplicirt man nach dem II. Fall alle Theile des einen Factors durch alle Theile des andern, sezt diese Partialproducte gehörig unter einander und bringt sie hierauf in eine Summe.

Exempel.

```
  0 —1 —2
 10 11 14
  0 —1 —2
  8  7 12
 ___________
 —1 —2 —3 —4
 02 02 14 48
   0
 01 11 18 38
+1
01 21 20 52
_____________________
+1  0 —1 —2 —3 —4
01 22 24 12 52 48 Product.
```

Sexagesimalbrüche zu dividiren.

I. Fall. Wenn beyde, Divisor und Dividendus, einfach sind, so dividire man wie gewöhnlich, ziehe aber den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendi ab; diese Differenz ist der Exponente des Quotienten. Geht der Divisor im Dividendo nicht auf, so kann man entweder am Quotienten wie gewöhnlich einen Bruch hängen, oder den Rest mit einer um 1 niedrigen Potenz der 60 multipliciren, und auf diese Art die Division, so weit man will, fortsetzen, und den Quotienten so nahe, als man es für nöthig findet, durch Sexagesimalbrüche ausdrücken. Eben dies kann man auch, wenn man, wie im Buche geschehen ist, an den Rest 00 in eine um 1 niedrigere Ordnung als die des Dividendi oder des nächst vorhergehenden Restes ist, schreibt, und wie vorher dividirt.

Das Exempel im Buche gehört hieher.

Fernere Exempel. *)

$$\overset{-2}{03}\;\Big|\;\overset{-2}{18}\;\Big|\;\overset{0}{06}; \qquad \overset{-2}{03}\;\Big|\;\overset{+2}{18}\;\Big|\;\overset{+4}{06}$$

$$\overset{-2}{18} \qquad\qquad \overset{+2}{18}$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$$\overset{+2}{03}\;\Big|\;\overset{-2}{18}\;\Big|\;\overset{-4}{06}; \qquad \overset{-5}{03}\;\Big|\;\overset{-2}{18}\;\Big|\;\overset{3}{06}$$

$$\overset{-2}{18} \qquad\qquad \overset{-2}{18}$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$$\overset{12}{03}\;\Big|\;\overset{+5}{18}\;\Big|\;\overset{-7}{06}; \qquad \overset{+6}{03}\;\Big|\;\overset{+7}{18}\;\Big|\;\overset{-5}{06}$$

$$\overset{+4}{18} \qquad\qquad \overset{+2}{18}$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$$\overset{-2}{03}\;\Big|\;\overset{-4}{17}\;\Big|\;\overset{-2}{05}\;\overset{-3}{04}$$

$$\overset{-4}{15}$$

$$\overset{-4}{2}\;\overset{-5}{00} = 2 \cdot \overset{-5}{60} \cdot 60 = \overset{-5}{120}$$

$$\overset{-4}{2} = \overset{-5}{120}$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

04

*) Aus Hausens El. Math. p. 30 etc.

$$\overset{-1}{04} \,\Big|\, \overset{+2}{19} \,\Big|\, \overset{+3}{04}\ \overset{+2}{45}$$

$$\overset{+2}{16}$$

$$\overset{+2}{03}\,\overset{+1}{00} = 3 \cdot 60^2 = 3 \cdot 60 \cdot 60 = 180 \cdot 60 = \overset{+1}{180}$$

$$\overset{+2}{3} \qquad = \qquad \overset{+1}{180}$$

$$\overset{+1}{0} \qquad = \qquad \overset{+1}{0}$$

Divis. Divid.

$$\overset{-1}{14} \,\Big|\, \overset{-2}{31} \,\Big|\, \overset{-1}{02}\ \overset{-2}{12}\ \overset{-3}{51}\ \overset{-4}{25}\ \overset{-5}{42}\ldots$$

$$28$$

$$\overset{-2}{3} = \overset{-3}{180}$$

$$\overset{-3}{168}$$

$$\overset{-3}{12} = \overset{-4}{720}$$

$$\overset{-4}{714}$$

$$\overset{-4}{6} = \overset{-5}{360}$$

$$\overset{-5}{350}$$

$$\overset{-5}{10} = \overset{-6}{600}$$

$$\overset{-6}{588}$$

$$\overset{-6}{12}$$

II. Fall. Wenn der Divisor einfach ist, der Dividendus aber aus mehrern Theilen besteht, so

 dividi-

dividire man nach dem I. Fall jedem Theil des Dividendi durch den Divisor, indem man mit dem höchsten anfängt, nach und nach zu den folgenden fortgeht, und was bey jeder Partialdivision übrig bleibt, zum folgenden Theil des Dividendi rechnet. Geht der Divisor im ganzen Dividendo nicht auf, so verfährt man eben so, wie im ersten Falle, gelehrt worden.

Exempel.

$$\overset{-2}{14}\;\Big|\;\overset{0}{34}\;\overset{-1}{16}\;\overset{-2}{10}\;\Big|\;\overset{+2}{02}\;\overset{+1}{26}\;\overset{0}{51}\;\overset{-1}{08}\;\overset{-2}{34}\ldots$$

$$28\;\overset{-1}{360}\;\overset{-2}{720}$$

$$6\;376\;\overset{-2}{730}$$

(14) div. (14) div.

mult. mit $\overset{-1}{60}$ 28 70

giebt $\overset{-1}{360}$ 96 30

84 28

$\overset{-1}{12}$ $\overset{-2}{2}$

$\overset{-1}{60}$ $\overset{-1}{60}$

$\overset{-2}{720}$ $\overset{-3}{120}$

(14) div.

$\overset{-3}{112}$

$\overset{-3}{8}$

$\overset{-1}{60}$

$\overset{-4}{480}$

(14) div.

42

$\overset{-4}{60}$

$\overset{-4}{56}$

$\overset{-4}{4}$

III. Fall. Wenn so wohl Dividendus als Divisor aus mehrern Theilen zusammengesezt ist: so dividirt man den höchsten Theil des Dividendi durch den höchsten Theil des Divisors, wenn jener nicht kleiner als dieser ist, denn gegentheils müssen die beyden höchsten Theile des Dividendi zusammengenommen werden. Nun multiplicirt man den gefundenen Quotienten in den ganzen Divisor, und zieht das Product vom Dividendo ab. Mit dem Rest verfährt man eben so, und man erhält dann nach einander die Theile des Quotienten. Geht nicht alles auf, so wird man sich schon nach dem ersten Falle zu helfen wissen.

Exempel.

Divisor	Dividendus	Quot.
0 —1 —2 —3	0 —1 —2 —3 —4 —5 —6	0 —1 —2 —3
04, 01 02 09	00, 20 17 41 58 42 03	00 05 03 07
	—1 —2 —3 —4	
	20 05 10 45	
	—2 —3 —4 —5	
	12 31 13 42	
	—2 —3 —4 —5	
	12 03 06 27	
	—3 —4 —5 —6	
	28 07 15 03	
	28 07 15 03	
	0	

54

Divisor								Dividendus									Quot.
—1	—2	—3	—4	—5	—5	—7	—8	0	—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	0
59	08	19	37	24	25	41	39	29	34	09	48	42	12	50	49	30	30
								29	30								
									04	00							
										09	30						
									0		18	30					
												12	00				
													12	30			
														20	30		
															19	30	
								29	34	09	48	42	12	50	49	30	
												0					

$$\overset{-1}{54}\ \overset{-2}{49}\ \overset{-3}{36}\ \Big|\ \overset{0}{05}\ \overset{-1}{17}\ \overset{-2}{03}\ \overset{-3}{24}\ \overset{-4}{18}\ \overset{-5}{33}\ \Big|\ \overset{0}{5}\ \overset{-1}{46}\ \overset{-2}{58}\ \overset{-3}{24}\ \overset{-4}{54}\ \ldots$$

$$\begin{array}{rl}
04\ 30 \ldots\ldots\ldots\ldots & = \overset{-1}{54}\cdot\overset{0}{5} \\
04\ 05 \ldots\ldots\ldots & = \overset{-2}{49}\cdot\overset{0}{5} \\
03\ 00 \ldots\ldots & = \overset{-3}{36}\cdot\overset{0}{5} \\
\hline
\text{abgezogen}\ 04\ 34\ 08\ 00 & = (\overset{-1}{54}\cdot\overset{0}{5} + \overset{-2}{49}\cdot\overset{0}{5} + \overset{-3}{36}\cdot\overset{0}{5})
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
00 & \overset{-2}{42} & 55 & \overset{-3}{24} & \overset{-4}{18} \\
 & 41 & 24 & & \\
 & & 37 & 34 & \\
 & & & 27 & 36 \\
\hline
 & \overset{-1}{42} & 02 & 01 & \overset{-4}{36}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
\overset{-1}{42} & 02 & 01 & \overset{-4}{36} \\
\hline
\overset{-2}{53} & 22 & \overset{-4}{42} & \overset{-5}{33} \\
52 & 12 & & \\
 & 47 & 22 & \\
 & & 34 & 48 \\
\hline
\overset{-2}{52} & 59 & 56 & \overset{-5}{48}
\end{array}$$

```
—2          —5
52  59  56  48
    —3          —6
00  22  45  45  00
    21  36
        19  36
            14  24
    21  55  50  24
                    —7
    00  49  54  36  00
        48  36
            44  06
                32  04
    49  10  38  04
    00  43  57  56 ꝛc.
```

Anhang.

Im 3. §. dieses Capitels haben wir zwar gelernet, wie ein gemeiner oder eigentlicher Bruch in einem ihm gleichen Decimalbruch zu verwandeln sey: Aber es fragt sich dabey, wie nun auch umgekehrt, ein jeder zehntheiliger Bruch in einen ihm gleichen gemeinen Bruch verwandelt werden könne.

Dies kann bey endlichen Decimalbrüchen leicht geschehen: denn man darf nur den zehntheiligen Bruch, wie einen gemeinen Bruch schreiben, und diesen alsdenn aufheben: Wenn z. B. 0, 625 auf einen gemeinen Bruch gebracht werden soll, so sezt man

$0,625 = \frac{625}{1000}$ und hebt ihn auf wie folget:

$$\begin{array}{c|c} \overset{125}{} & \\ \frac{625}{1000} & \frac{5}{8} \end{array}$$

Aber bey solchen Decimalbrüchen die ins Unendliche fortgehen, und bey den eine oder mehrere Ziffern immer wiederholt werden, wie z. B. $0,333\ldots = \frac{1}{3}$; $0,09090909\ldots = \frac{1}{11}$; $0,6363\ldots = \frac{7}{11}$; $0,428571428571 42\ldots = \frac{3}{7}$ geschiehet die Verwandlung in einem eigentlichen Bruche so: Man nimmt nämlich von einem solchen Decimalbruche die Ziffern, die nach der Natur desselben zu einer Wiederholung erfodert werden, sieht sie als den Zähler eines Bruchs an, dessen Nenner aus so vielen 9 besteht, als eben dieser Zähler Ziffern enthält, und hebt diesen Bruch auf. Wenn z. E. $0,2962962\ldots$ in einem eigentlichen Bruch verwandelt werden soll, so sieht man 296 als den Zähler des Bruchs an, dessen Nenner $= 999$ ist; und hebt diesen Bruch durch 37 auf, wie folget:

$$\begin{array}{c|c} \overset{37}{} & \\ \frac{296}{999} & \frac{8}{27} \end{array}$$

Um nun diese Regel zu beweisen, setze man, die Ziffern die wiederholt werden, wären a b c d, und

$\frac{n}{m}$ der gemeine Bruch, in welchen der zehntheilige verwandelt werden soll; so wird $\frac{n}{m} = 0, abcd\ abcd\ abc \ldots$ und $10\frac{n}{m} = a, bcdabcda \ldots$; $100\frac{n}{m} = ab, cd\ abcda \ldots$; $1000\frac{n}{m} = abc, dabcda \ldots$; $10000 \cdot \frac{n}{m} = abcd, abcd\ ab \ldots$; Mithin ist

$$10000\frac{n}{m} - 1 \cdot \frac{n}{m} = (10000 - 1)\frac{n}{m} = 9999\frac{n}{m} = abcd, abcd\ abc \ldots - 0, abcd\ abc \ldots = abcd;$$

d. i. $9999\frac{n}{m} = abcd$ und folglich

$$\frac{n}{m} = \frac{abcd}{9999};$$

Man lese hiervon Eulers vollständige Anleitung zur Algebra I. Theil 12 Capitel, wornach auch gegenwärtiges vorgetragen ist.

11. 3. [illegible]

Erläute-

Erläuterungen der Kästnerischen Arithmetik

IV. Capitel.

Die Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzel.

In diesem Capitel ist mir fast gar nichts zu erläutern übrig, indem Anfänger dieses leicht für sich selbst verstehen können, so bald sie: **Müllers Erläuterung der Regeln Quadrat- und Cubicwurzeln auszuziehen, für Anfänger zum bessern Verständniß der Vorschriften in Herrn Hofrath Kästners Anfangsgründen der Arithmetik** werden gelesen haben. Es ist zu Göttingen 1776, in 8v, 116 Seiten stark, worunter 15 Seiten Anhang, der Erläuterungen des 31, 32, 33 und 34. §. des 5ten Capitels dieser Arithmetik enthält, herausgekommen. ×

§. 44.

Man findet auch die Quadrat- und Cubiczahlen für die Wurzeln von 1 bis 1000 in Herrn **Lamberts Zusätzen zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen. Berlin** 1770. Desgleichen auch in Herrn **Schulzens Sammlung logarithmischer, trigonometrischer,**

× dieses Büchlein ist Kästners analysis endlicher Größen hinten angebunden.

scher, mechanischer und andere zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafel ꝛc. 2 B. gr. 8v. Berlin 1778; im 2ten Bande.

§. 45.

Außer dem in diesem und vorigen §. angezeigten Gebrauch solcher Tafeln, dienen sie auch zur Verkürzung der Rechnung, wenn man die Quadrat- oder Cubicwurzel einer Zahl sucht, die die Gränzen der Tafeln überschreitet. Dies geschiehet, wenn man, nachdem die gegebenen Quadrat- oder Cubikzahl gehörig in Classen eingetheilt ist, von den Ziffern der so vielen höchsten Classen, als die höchsten Wurzeln in den Tafeln Ziffern enthalten, die nächst kleinere Quadrat- oder Cubiczahl, die man in den Tafeln findet, abziehet, und ihre Wurzel für den schon bekannten Theil der gesuchten Wurzel annimmt; übrigens aber mit der Rechnung nach den Regeln des 23. und 40. §. verfährt. Wäre z. B. aus der Zahl 455287562 5 die Quadratwurzel zu ziehen, und hätte man Tafeln nur für Wurzeln von 1 bis 1000, so könnte man die Quadratzahl 454276 = $(674)^2$ aus den Tafeln nehmen, und mit der übrigen Rechnung so verfahren

```
45|52|87|56|25|674 75
45 42 76|= (644)² abgezogen (674)²
   1011|56
    134|8 (= 2 . 674)
    944 09 (= 2 × 674 × 7 + 7²)
      674725
      13494 (= 2 × 6747)
      674725 (= 2 × 6747 × 5 + 5²)
         0
```

Die Algebra . . . . verfertigen.

Hiervon sehe man unsers Herrn Autors Algebra §. 44 und 48; Herrn Mag. Hindenburgs in der Erl. zu §. 21. des I. Cap. angeführten Buchs, IV, S. 39 u. f.; und andere.

§. 46.

So wäre $\sqrt{7,5} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt[3]{10}}$.

Hier lese man

$$\sqrt[3]{7,5} = \frac{\sqrt[3]{75}}{\sqrt[3]{10}}.$$

Aber ꝛc.

Nämlich. $\sqrt[3]{7,500} = \frac{\sqrt[3]{7500}}{\sqrt[3]{1000}}$; Also =

$\frac{\sqrt[3]{7500}}{10}$.

Uebrigens will ich hier noch folgendes beybringen:

Jeder Bruch, er sey ein zehntheiligter oder nicht, kann so verändert werden, daß die Wurzel seines Nenners rational wird: denn $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a\,b^{n-1}}{b^n}}$ $= \frac{\sqrt[n]{a\,b^{n-1}}}{b}$; Ist $a = 1$; so ist $\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$; Für Quadratwurzeln ist $n = 2$; also $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$; und $\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}$ z. E. $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}5773502$; $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0{,}8164966$. Für Cubicwurzeln ist $n = 3$; Also $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a\,b^2}}{b}$; und $\sqrt[3]{\frac{1}{b}} = \frac{\sqrt[3]{b^2}}{b}$ z. E. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[3]{4^2}}{4} = \frac{\sqrt[3]{16}}{4} = \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 8}}{4} = \frac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{8}}{4}$ (II. Cap. 15) $= \frac{2\,\sqrt[3]{2}}{4} = \frac{2{,}579842}{4} = 0{,}6299605$; Ferner $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 5^2}}{5} = \frac{\sqrt[3]{75}}{5} = 0{,}84342\ldots$

Erläu-

Erläuterungen der Kästnerischen Arithmetik

V. Capitel.

Von den Verhältnissen.

1) Ueberhaupt

Der erste, 2, 3 und 4te §. handelt davon.

§. 1 und 2.

Wenn man zwo Dinge einer Art vor sich hat, und frägt: Wie groß ist das Eine gegen das andere? so will man dadurch überhaupt ihre Verhältniß wissen; und man sieht leicht, daß diese Frage mit der einerley ist: Wie verhält sich die Größe des einen Dinges zur Größe des andern? Durch diese Frage nun, kann man zu zweyerley Untersuchungen veranlasset werden: Man kann 1) untersuchen, **um wie viel** die Größe des einen Dinges **größer** oder **kleiner** sey als die des andern; und in diesem Falle sucht man derselben ihr **arithmetisches Verhältniß**; oder 2) kann man untersuchen, **wie vielmal** die Größe des einen **größer** oder **kleiner** sey, als die des andern; hier erforscht man das **geometrische Verhältnis** derselben.

 Wenn

Wenn man also z. E. der Zahlen 20 und 5 ihr arithmetisches Verhältniß angeben soll; so soll man bestimmen um wie viel die eine größer oder kleiner ist, als die andere; das heißt aber weiter nichts, als ihren Unterschied angeben; und dieser wird, wie bekannt, durch die Subtraction gefunden. Will man aber eben dieser Zahlen 20 und 5 ihr geometrisches Verhältniß finden, so ist zu suchen, wie vielmal die eine größer oder kleiner ist, als die andere. Dies kann aber nicht anders, als durch die Division, geschehen. (I. 13 und dessen Erl.) Ob man also gleich das geometrische Verhältniß zwoer Größen durch die Division findet, so sieht man leicht, daß geometrische Verhältnisse und Quotienten nicht einerley seyn. Wie vielmal die eine Zahl (5 z. E.) in der andern (20 z. B.) enthalten sey, zeigt der Quotiente; und folglich zeigt er nur das geometrische Verhältniß an.

§. 4.

Die zwo Größen oder Zahlen, deren Verhält-
1. niß (1, 2 und dessen Erl.) man sucht, heißen die **Glieder** dieses Verhältnisses, und man sieht eins, welches man will, als das **Vorhergehende**, das andere aber als das **Nachfolgende** an. Die Ordnung der Glieder ist ganz willkührlich.

Man kann fragen: um wie viel ist z. B. 20 größer als 5, und umgekehrt, um wie viel ist 5 kleiner als 20. Die Antwort auf die erste Frage ergiebt sich durch den Ausdruck

$$20 - 5 = 15$$

und

und die auf die andere durch den

$$5 - 20 = - 15$$

die — 15 zeigt nämlich an, daß 5 um 15 kleiner ist als 20.

Ferner kann man fragen: erstlich wie vielmal ist 20 größer als 5, und der Ausdruck

$$\frac{20}{5} = 4$$

zeigt, daß 20, viermal größer ist, als 5;

Zweytens: wie vielmal ist 5 kleiner als 20, und der Ausdruck $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ giebt die Antwort, daß es 4mal sey.

2) Von der arithmetischen Verhältniß und Proportion.

Davon wird von §. 5 bis 13 gehandelt.

§. 5 und 6.

Die zwey arithmetischen Verhältnisse 20 — 15 und 35 — 30 sind einander gleich und ähnlich, weil so wohl 20 — 15 = 5 als auch 35 — 30 = 5, ist. Da nun die Gleichheit zweyer Verhältnisse eine Proportion ist, so ist

$$20 - 15 = 35 - 30$$

eine arithmetische Proportion. Weil aber 20 — 15 = 5; so sieht man leicht, daß 15 = 20 — 5; und folglich 20 — 15 = 20 — (20 — 5); Aus eben der Ursache ist auch 35 — 30 = 35 —

$(35 - 5)$. Mithin verwandelt sich $20 - 15 = 35 - 30$, in

$$20 - (20 - 5) = 35 - (35 - 5)$$

Sezt man $20 = a$; $5 = d$; $35 = b$; so verwandelt sich $20 - (20 - 5) = 35 - (35 - 5)$ in $a - (a - d) = b - (b - d)$. Dies ist ein allgemeiner Ausdruck für eine arithmetische Proportion, wo das zweyte Glied, jeder Verhältniß derselben kleiner ist, als das erste dieser Verhältnisse.

$15 - 20 = 30 - 35$ ist offenbar ebenfalls eine arithmetische Proportion: denn $15 - 20$ sowohl, als $30 - 35$ ist $= - 5$; also $20 = 15 + 5$, und $35 = 30 + 5$; folglich verwandelt sich

$$15 - 20 = 30 - 35 \text{ in}$$
$$15 - (15 + 5) = 30 - (30 + 5)$$

Sezt man $15 = a$; $30 = b$ und $5 = d$; so wird aus

$$15 - (15 + 5) = 30 - (30 + 5) \text{ nun}$$
$$a - (a + d) = b - (b + d)$$

ein allgemeiner Ausdruck für eine arithmetische Proportion, wo das zweyte und also auch das vierte Glied ~~kleiner~~ größer ist, als das erste und dritte.

Man sieht nun leicht daß der allgemeine Ausdruck

$$a - (a \mp d) = b - (b \mp d)$$

diese beyden izt betrachteten Fälle einer arithmetischen Proportion enthält. Das doppelte vor d

stehen-

stehende Zeichen $\mp$ zeigt an, daß man $-d$ nehmen müsse, wenn der erste Fall vorhanden, $+d$ aber, wenn der andere vorkommt.

§. 10.

Wenn $a-(a+d)=b-(b+d)$; so ist

$$a-(a+d)+(b+d)=b-(b+d)+(b+d)=b$$

und $a-(a+d)+(b+d)+(a+d)=b+(a+d)$

oder $a+(b+d)=b+(+a+d)$; d. i.

$$a+b+d=b+a+d$$

Aus diesem Satze, daß nämlich, in jeder arithmetischen Proportion die Summe der beyden mittlern Glieder so groß als die Summe der beyden äußern ~~seyn~~, ergiebt sich die Auflösung folgender sind.
Aufgabe:

Zu drey gegebenen Größen die vierte arithmetische Proportionalgröße zu finden.

Es seyen die gegebenen Größen a, b, c, und x die gesuchte vierte arithmetische Proportionalgröße, so muß

$$a-b=c-x \text{ seyn; und}$$

daher $a+x=b+c$; folglich

$$x=(b+c)-a$$

Addirt man demnach die zweyte zur dritten und zieht von ihrer Summe die erste ab, so erhält man x.

Exempel.

Es sey $a = 13$; $b = 16$; $c = 28$;
so wird $x = 16 + 28 - 13 = 44 - 13 = 31$.

Ist die Summe zwoer Größen $a + e$, eben so groß als die zwoer andern $b + c$; so sind allemal die zwo Größen der einen Summe, zwischen den beyden andern, mittlere arithmetische Proportionalgrößen. Denn da

$$a + e = b + c$$

so ist

$$a + e - e = b + c - e, \text{ d. i.}$$
$$a = b + c - e \text{ und}$$
$$a - b = b + c - e - b; \text{ oder}$$
$$a - b = c - e$$

§. 11.

Eine stetige arithmetische Proportion ist

$$a - (a + d) = a + d - (a + 2\,d)$$

Nun ist (nach 10)

$$a + (a + 2\,d) = (a + d) + (a + d)$$

das ist $a + a + 2\,d = 2\,(a + d)$;
Aber $a + a + 2\,d = 2\,a + 2\,d = 2\,(a + d)$.

Exempel.

$$12 - 7 = 7 - 2 \text{ und}$$
$$12 + 2 = 7 + 7 = 2 \cdot 7 = 14.$$

§. 12.

Man findet . . . . halbirt.

Denn

Denn es sey $a - x = x - b$ so ist (nach 11)

$$a + b = 2x; \text{ folglich}$$

$$x = \frac{a + b}{2}$$

Diese für x gefundene Formel gilt, es mag das dritte Glied b, größer oder kleiner als das erste, a, seyn: denn wenn das mittlere Glied $x = a + d$; so ist das dritte $b = a + 2d$ (§. 9.) größer als das erste a, folglich $b - a = 2d$; und

$$d = \tfrac{1}{2}(b - a)$$

Dieses in die Gleichung $x = a + d$ gesezt, giebt

$$x = a + \tfrac{1}{2}(b - a)$$

Z. E. sey $a = 39$; $b = 47$; so ist

$$x = 39 + \tfrac{1}{2}(47 - 39) = 39 + \tfrac{1}{2}\,8$$

$= 39 + 4 = 43$ wie gehörig.

Aber $a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{2}{2}a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{2a + b - a}{2} = \frac{a + a - a + b}{2} = \frac{a + b}{2}$; welches die erst für x gefundene Formel ist, und also der izt erhaltenen gleich.

Wäre $x = a - d$; und also $b = a - 2d$; (§. 9.) folglich kleiner als a; so ist

$$b + 2d = a - 2d + 2d = a$$

und $b + 2d - b = a - b$ oder

$$2d = a - b; \text{ folglich}$$

$$d = \frac{a - b}{2}$$

Sezt

Sezt man nun dieses statt d in die Gleichung

$$x = a - d$$

so erhält man $x = a - \frac{a - b}{2} = a - \frac{1}{2}(a - b)$

Es sey $a = 47$; $b = 39$; so ist

$$x = 47 - \tfrac{1}{2}(47 - 39) = 51.$$ 43

Aber die Formel $a - \frac{1}{2}(a - b) = \frac{2}{2}a - \frac{1}{2}(a - b) = \frac{2a - (a - b)}{2} = \frac{2a - a + b}{2} = \frac{a + b}{2}$.

3) Von der geometrischen Verhältniß und Proportion.

§. 17 und 18.

Eine geometrische Proportion besteht also aus zwey gleichen geometrischen Verhältnissen; und man läßt, wie schon im 3. §. bemerkt wurde, das Beywort: geometrisch, weg; sagt also nur schlechthin: Proportion, Verhältniß. Eine solche Proportion aber deutet der Ausdruck

$a : b = c : d$ oder in Zahlen z. B.

$8 : 4 = 10 : 5$

ihrer Erklärung gemäß, an; und man sagt bey einer Proportion: Es verhält sich a zu b, wie c zu d, oder auch: wie a zu b, so c zu d.

Sie erfodert also vier Glieder, wovon, wie im 6. §. das erste und vierte (a und d) die äußern, das

zweyte

zweyte und dritte (b und c) aber, die mittlern, heißen. Die gleichnamigen Glieder sind das erste und dritte Glied, (a, c) so wie ebenfalls auch das zweyte und vierte (b, d). Sind die beyden mittlern Glieder einander gleich, so heißt sie zusammenhängend oder stetig. Eine solche stetige Proportion wird

a : b = b : c oder in Zahlen

z. B. 8 : 4 = 4 : 2, seyn.

§. 19.

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; so ist

$$\frac{a \times d \,.\, b}{b} = \frac{c \times d \,.\, b}{d} \text{ oder}$$

$$a \,.\, d = c \,.\, b$$

$$\frac{a \,.\, d}{a \,.\, c} = \frac{c \,.\, b}{a \,.\, c} \text{ oder}$$

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

§. 20.

Wenn F . f = P; so ist P ein Product, dessen Factoren f und F sind; und es steckt (nach I, 10,) die Einheit in dem einen Factor (f) so vielmal, als wie der andere (F) im Producte (P). Vergleicht man dieses mit §. 2. und dessen Erl. so wird man finden, daß aus diesem izt angeführten Satze die Proportion folgt: 1 : f = F : P; Sie folgt aber

aber auch ohne ihn mittelst des Zusatzes im 16. §. aus der Gleichung F . f = P selbsten.

Denn da F . f = P; so ist

$$\frac{F.f}{P} = \frac{P}{P} = 1 \text{ und}$$

$$\frac{F.f}{P.f} = \frac{1}{f} = \frac{F}{P}$$

Daher 1 : f = F : P; das Product (P) also, ist die vierte Proportionalgröße zu der Einheit und den beyden Factoren (F und f) diese Eigenschaft der Multiplication kann man für ihre allgemeinste Erklärung annehmen, und sagen: eine Größe mit einer andern multipliciren, heißt, zu der Einheit und den beyden Factorn die vierte Proportionalgröße, suchen. Nach I, 14 ist der Divisor so vielmal im Dividendo enthalten, als die Einheit im Quotienten; Wenn daher $\frac{D}{d}$ = Q; so ist d : D = 1 : Q. Der Quotient (Q) also ist die vierte Proportionalgröße zu dem Divisor (d), Dividendus (D) und der Einheit; und diese Eigenschaft dient zu der allgemeinsten Erklärung der Division. Man kann nämlich sagen: Eine Größe mit einer andern dividiren, heißt zum Divisor, Dividendus und der Einheit die vierte Proportionalgröße, suchen.

§. 21.

Nun kann . . . . Division.

Ist

Ist $m = \frac{1}{m}$; so wird aus $\frac{ma}{mb}$ nun $\frac{\frac{1}{m}a}{\frac{1}{m}b} =$

$$\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{a:m}{b:m} \text{ (I. 61)} = \frac{a}{b} \text{ (I. 67.)}$$

Daher $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b$

§. 22.

Und zwo Brüche, die gleiche Zähler haben, verhalten sich umgekehrt wie ihre Nenner. Denn es seyen diese zwo Brüche $\frac{a}{m}$ und $\frac{a}{n}$; so ist

$$\frac{a}{m} : \frac{a}{n} = n : m; \text{ denn } \frac{a \cdot n}{m \cdot n} : \frac{a \cdot m}{n \cdot m} =$$

$an : am = n : m$

§. 23.

Diese Definition ist mit der völlig einerley:

Eine Verhältniß deren Glieder rational, heißt eine **Rationalverhältniß**; Sind aber beyde Glieder oder eins, würklich irrational, eine **irrationale Verhältniß**. Bey jener ist der Quotient der Glieder rational, bey dieser aber irrational.

Die Verhältniß 3 : 12 ist rational, und die im Buche angegebene irrational wie auch die $\sqrt{3} : \sqrt{5}$

§. 25.

§. 25.

Die angegebene; nämlich die Verhältniß 15 : $\sqrt{3}$; ist, ohngefähr = 15 : 1, weil $\sqrt{3}$ ohngefähr = 1 ist; genauer ist sie 15 : 1, 7, weil 1, 7 genauer die $\sqrt{3}$ ist; aber

$$15 : 1,7 = 15 \cdot 10 : 1,7 \cdot 10 \text{ (§. 21)}$$

= 150 : 17 (weil 1, 7 = $\frac{10}{17}$; und daher 1, 7 . 10 = $\frac{17}{10}$. 10 = 17).

$\frac{17}{10}$

§. 26.

Es ist willkührlich welches Glied man nehmen will, um zu sehen, wie vielmal es in dem andern stecke. Gemeiniglich nimmt man das folgende Glied, und sieht daher die Zahl, die anzeigt wie vielmal das folgende in dem vorhergehenden enthalten ist, als den Exponenten oder Namen einer Verhältniß an. Nach dieser Erklärung ist des Verhältnisses a : b Exponente = $\frac{a}{b}$, oder in Zahlen, des: $99 : 9 = \frac{99}{9} = 11$.

§. 27.

Der Exponente der Verhältniß 20 : 5 $\sqrt{3}$ = $\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{20} = \frac{5}{20}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot 1,7 = \frac{1,7}{4} = 0,4$ wenn $\sqrt{3} = 1,7$ gesezt wird; nimmt man sie aber = 1, 73 an, so erhält man

$\frac{1}{4}\sqrt{3}$

$\frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{1,73}{4} = 0,43$; Wie man gewöhnlich den Exponenten nimmt, wäre des Verhältnisses $20 : 5\sqrt{3}$ Exponente $= \frac{20}{5\sqrt{3}} = \frac{4}{1,7} = 2,117 \ldots$ in so ferne $\sqrt{3} = 1,7$ gesezt wird; sezt man sie aber $= 1,73$, so wäre der $20 : 5\sqrt{3}$ Exponente $= \frac{4}{1,73} = 2,312 \ldots.$

§. 28.

Der Verhältniß $a : b$ Exponent findet sich durch $\frac{b}{a}$ (26); sezt man dies $= m$ also, daß $\frac{b}{a} = m$, so ist

$b = a\,m$; und daher

$a : b = a : a\,m$

Da nach Erl. zu (26) der Verhältniß $a : b$ Exponent auch $= \frac{a}{b}$ seyn kann, so setze man $\frac{a}{b} = \frac{1}{m}$; und es ist $a = \frac{b}{m}$, und $b = a\,m$; Also $a : b = a : a\,m$. Wenn folglich das zweyte Glied einer Verhältniß größer ist, als das erste, so ist es ein Product aus dem ersten in den Exponenten. Wäre aber $\frac{a}{b} = m$, also $b < a$, so ist $b =$

$\frac{a}{m}$; und folglich $a : b = a : \frac{a}{m}$. In diesem Falle also, (wenn nämlich $b < a$,) ist das 2te Glied einer Verhältniß ein Quotiente aus dem ersten Gliede durch den Exponenten.

§. 29.

Wenn

$a : ma =$ ~~xb~~ $b : xb$

wo x der Exponente des zweyten Verhältnisses ist, so wird auch (nach 16) $\frac{ma}{a} = \frac{xb}{b}$; und daher $m = x$.

Folglich haben gleiche Verhältnisse auch gleiche Exponenten.

Wenn a, m a, b drey Glieder einer Proportion sind, so muß das vierte m b, seyn; denn $a : ma = b : mb$, weil $\frac{ma}{a} = \frac{bm}{b} = m$ ist. Wie vielmal also das erste Glied größer oder kleiner ist als das zweyte, eben so vielmal muß das dritte größer oder kleiner seyn, als das vierte. In der Proportion $a : ma = b : mb$, ist das erste Glied m mal kleiner als das zweyte, und das dritte ist ebenfalls auch m mal kleiner als das vierte. In der Proportion

$$ma : a = mb : b$$

ist das erste Glied m mal größer als das zweyte, so wie auch das dritte m mal größer ist als das

vierte.

vierte. Z. B. in der in Zahlen gegebenen Proportion

$$8 : 4 = 10 : 5$$

ist das erste Glied 2mal größer als das zweyte; und das dritte ist auch 2mal größer als das vierte.

§. 30.

Eine stetige Proportion ist (nach 17) $a : b = b : c$; aber (nach 28) ist $b = a\,m$; und (nach 29) $c = b\,m$; folglich verwandelt sich $a : b = b : c$ in $a : a\,m = a\,m : b\,m$ oder

$$a : a\,m = a\,m : a\,m^2 \text{ (weil } b = a\,m)$$

Nimmt man am fürs erste Glied an, und $a\,m^2$ fürs zweyte, so ist das dritte $= a\,m^3$; denn $a\,m : a\,m^2 = a\,m^2 : a\,m^2 . m$ d. i. $a\,m : a\,m^2 = a\,m^2 : a\,m^3$; Ist $a\,m^2$ das erste Glied und $a\,m^3$ das zweyte; so ist $a\,m^2 : a\,m^3 = a\,m^3 : a\,m^4$. Aber da $a : a\,m = a\,m : a\,m^2$; und $a\,m : a\,m^2 = a\,m^2 : a\,m^3$; Und $a\,m^2 : a\,m^3 = a\,m^3 : a\,m^4$; so ist $a : a\,m = a\,m : a\,m^2 = a\,m^2 : a\,m^3 = a\,m^3 : a\,m^4 =$ (wie man leicht weiter schlüßen kann) $a\,m^4 : a\,m^5 = a\,m^5 : a\,m^6 = a\,m^6 : a\,m^7$ u. s. f. Dies schreibt man auch so:

$$a,\ a\,m,\ a\,m^2,\ a\,m^3,\ a\,m^4,\ a\,m^5,\ a\,m^6,\ a\,m^7, \text{ ꝛc.}$$

und nennt es eine **geometrische Reihe** oder **Progreßion**, wovon im IV. Cap. mehreres gesagt wird.

§. 31.

Den 31, 32, 33, 34. §. hat Herr Nicolaus Müller in dem angeführten Buche der Regeln der

Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzeln, erläutert.

§. 37.

Dieser §. und der 38, 39, 40 und 41. handeln von der Regel Detri (regula de tribus sc. numeris). Sie heißt auch die güldene Regel (regula aurea) weil sie von ungemein großen Nutzen, nicht nur alleine in der Mathematik, sondern auch im bürgerlichen Leben, ist. Allemal da, wo ein paar Größen einer gewissen Art sich eben so verhalten, wie ein paar Größen, das entweder von eben dieser Art, oder von einer andern ist, läßt sich die Regel Detri anbringen, in so fern drey von diesen Größen gegeben sind, und die vierte gesucht werden soll.

Jede Aufgabe der Regel Detri muß solche Bedingungen enthalten, woraus man urtheilen kann, wie die Glieder der anzusetzenden Proportion zu ordnen sind, d. h. welche Größe von den 3 gegebenen zum ersten oder zum zweyten Gliede der ersten Verhältniß der anzusetzenden Proportion, genommen werden muß.

Z. B. Es kauft einer von jemanden 3 Centner Stahl für 60 Thaler; Kurz darauf aber kauft er von eben diesen 19 Centner Stahl: Er will nun wissen, was er ihm dafür, in Verhältniß der erst gekauften 3 Centner, zu bezahlen habe. Hier sieht man daß das Gesuchte, der Werth von den 19 Centner Stahl ist, und daß es größer seyn

muß,

muß, als der Werth für die 3 Centner, mit welchem das Gesuchte in einer Verhältniß steht. Dieser Werth aber ist das dritte Glied der anzusetzenden Proportion und kleiner als das Gesuchte, welches x seyn soll: daher muß (nach §. 29. und dessen Erl.) hier das erste Glied auch kleiner seyn, als das 2te. Folglich hat man

$$3 \text{ Cent.} : 19 \text{ Cent.} = 60 \text{ Thl.} : x$$

$$\text{Mithin } x = \frac{19 \times 60}{3} = 19 \cdot 20 = 380 \text{ Thl.}$$

Wenn also eine Aufgabe der Regel Detri, was es auch für eine sey, vorgegeben ist, und man will die Proportion, die die Aufgabe erfodert, richtig ansetzen, so sehe man, ob das Gesuchte, das immer noch x heißen mag, nach den Bedingungen der Aufgabe größer oder kleiner seyn muß, als das dritte Glied, welches, wie gedacht, diejenige von den drey gegebenen Größen ist, die mit der gesuchten in einem Verhältnisse steht. Muß nun das Gesuchte größer seyn, als besagtes drittes Glied, so muß das erste Glied der anzusetzenden Proportion kleiner seyn, als das zweyte. Man nimmt also von den übrigen zweyen Größen, die kleinste für das erste Glied. Muß aber das Gesuchte kleiner seyn, als das dritte Glied, so wird die größte, von den izt genannten zwey Größen, das erste Glied der anzusetzenden Proportion. Uebrigens verfährt man, wie es der 35. §. erfodert. Nun sollen einige Exempel folgen.

I.

Zu einem anzulegenden Teich wird durch 36 Arbeiter in 12 Tagen Grund gegraben; Es soll dies aber in 9 Tagen geschehen. Man frägt daher, wie viel Arbeiter dazu erfodert werden. Hier sollen also Arbeiter gesucht werden; daher steht das Gesuchte mit den 36 Arbeitern in einer Verhältniß, und es ist folglich 36 Arbeiter das dritte Glied der anzusetzenden Proportion. Da aber zu ein und eben dieser Arbeit in 9 Tagen mehr Arbeiter erfodert werden als in 12 Tagen; so ist das Gesuchte größer als das dritte Glied; daher nimmt man die 9 Tage zum erstem Gliede und folglich die 12 Tage zum andern. Mithin hat man die Proportion:

$$9 \text{ Tage} : 12 \text{ Tage} = 36 \text{ Arb.} : x \text{ Arb.}$$

$$\text{Daher } x = \frac{12 \cdot 36}{9} = \frac{12 \cdot 4 \cdot 9}{9} = 12 \cdot 4 = 48$$

Folglich erfodert eben diese Arbeit in 9 Tagen 48 Arbeiter.

II.

Wenn 1 Ducaten 2 Thl. 20 Gr. oder $2\frac{5}{6}$ Thl. gilt, 1 Louisd'or aber 5 Thl.; so ist

$$1 \text{ L.} : 1 \text{ Duc.} = 5 \text{ Thl.} : 2\tfrac{5}{6} \text{ Thl.}$$

$$\text{Aber } 5 \text{ Thl.} : 2\tfrac{5}{6} \text{ Thl.} = 5 : \frac{17}{6} = \frac{5 \cdot 6}{6} : \frac{17}{6}$$

$$= 30 : 17;$$

folglich 1 L. : 1 Duc. = 30 : 17; da nun

17 . 1 L. = 30 . 1 Duc.; so sind
17 Louisd'or = 30 Ducaten.

Will man also wissen, wie viel z. B. 1000 Ducaten in Louisd'or betragen, so hat man folgende Proportion anzusetzen:

30 Duc. : 1000 Duc. = 17 L. : x, d. i. (wenn man nach §. 31. sowohl in 30 als 1000 mit 10 dividirt)

3 Duc. : 100 Duc. = 17 L. : x

Folglich $x = \frac{1700}{3} = 566\frac{2}{3}$ Louisd'or.

Dies ist ein Exempel der so genannten Wechselrechnung.

III.

Wenn von 100 Thl. Capital jährlich 5 Thl. Zinse gegeben wird, und man wissen will, wie viel Zinse 100000 Thl. Capital in einem Jahre eintragen, so sieht man leicht, daß dies aus nachstehender Proportion gefunden wird:

100 Thl. : 100000 Thl. = 5 : x oder
1 : 1000 = 5 : x;

Daher x = 5000 Thl. Folglich trägt 100000 Thl. in 1 Jahre 5000 Thl. Interesse ein.

Wenn man weiß, daß z. E. 1000 Thl. in einem Jahre 50 Thl. Interesse tragen, so läßt sich leicht finden, wie viel nach einer gewissen Zeit,

z. E. nach 6 Jahren 8 Monaten oder $6\frac{8}{12}$ Jahren an restirender Zinse zu bezahlen ist. Man schlüßt nämlich:

$$1 \text{ Jahr} : 6\tfrac{2}{3} \text{ Jahr} = 50 \text{ Thl.} : x, \text{ oder}$$

$$1 \text{ Jahr} : \frac{20}{3} \text{ Jahr} = 50 \text{ Thl.} : x; \text{ daher}$$

$$x = \frac{20}{3} \times 50 = \frac{1000}{3} = 333\tfrac{1}{3} \text{ Thl.}$$

Dies waren Exempel aus der so genannten Zinsrechnung.

IV.

Erhält man von 100 Thl. jährlich 5 Thl. Zinse, so wird nach 1 Jahre aus 100 Thl., 105 Thl.; nach 2 Jahren 110 Thl.; nach 3 Jahren 115 Thl. nach 4 Jahren 120 Thl. u. s. w. Erwägt man dieses, so kann man auch umgekehrt schlüssen: 105 Thl. waren vor einem Jahre 100 Thl.

110 Thl. waren vor zwey Jahren 100 Thl.
115 Thl. waren vor drey Jahren 100 Thl.
120 Thl. waren vor vier Jahren 100 Thl.

u. s. f. Sezt man nun, daß einer jemanden nach 4 Jahren 8500 Thl. zu bezahlen schuldig ist; will sie aber gleich bezahlen; so frägt sichs wie viel er ihn izt bezahlen muß, da er wegen des Vortheils, den sein Creditor der frühern Bezahlung wegen hat, demselben nicht die ganzen 8500 Thl. zu bezahlen braucht.

Da

Da man weis, daß 120 Thl. vor 4 Jahren 100 Thl. war, das Gesuchte mit dem 8500 Thl. in einer Verhältnis stehen, und das Gesuchte kleiner als 8500 seyn muß; so wird 120 Thl. das erste Glied der anzusetzenden Proportion:

$$
\begin{array}{llll}
120 \text{ Thl.} & : 100 \text{ Thl.} & = 8500 \text{ Thl.} & : x, \\
12 & : 10 & = 8500 & : x \ (\S.\ 21) \\
6 & : 5 & = 8500 & : x \ (\S.\ 21) \\
6 & : 8500 & = 5 & : x \ (\S.34.\text{I}) \\
3 & : 4250 & = 5 & : x \ (\S.\ 21)
\end{array}
$$

(Es ist nämlich erstlich 120 und 100 (nach 21) mit 10 dividirt worden, dann die erhaltene 12 und 10 mit 2; ferner wurde (nach 34. I.) das dritte Glied 8500 zum zweyten gemacht und das zweyte zum dritten, und so erhielt man die 4te Proportion, dessen beyden ersten Glieder 6 und 8500 mit 2 dividirt, die fünfte gab.)

$$\text{Folglich ist } x = \frac{4250 \cdot 5}{3} = \frac{21250}{3} = 7083 \tfrac{1}{3} \text{ Thl.}$$

Also erhält der Creditor nur

7083 Thl. 8 Gr.

und der Debitor behält also von dem Capital das erst in vier Jahren zu bezahlen war

8500 Thl. — 7083 Thl. 8 Gr. = 1416 Thl. 16 Gr.

inne.

Das ist ein Exempel aus der so genannten Rabatt- oder Interusurienrechnung, wo das, was der Debitor der frühern Bezahlung wegen, inne behält, welches hier 416 Thl. 16 Gr. war, der Rabatt, in Rechten das Interusurium genennt wird. Die Berechnung ist nach der gemeinen Art geschehen. Mehreres davon findet man in Langsdorfs Erläuterungen der Kästnerischen Analysis endlicher Größen, von S. 283 bis 296, und in Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik im 2. Theile der alten Edition in XIII und XIV. Abschnitte.

V.

Wenn eine Person A einer andern B auf 4 Monate 500 Thl. ohne Zins geliehen hat, und nun B dem A wieder 300 Thl. mit der Bedingung leihet, daß A sie so lange behalten soll, bis die 300 Thl. eben so viel Zinse tragen als die 500 Thl. in 4 Monaten; so fragt sichs wie viel Monate, A die 300 Thl. hat behalten dürfen. Man sieht leicht, daß die 300 Thl. eine längere Zeit, als 4 Monate ausstehen müssen, wenn sie eben so viel Zinse hervorbringen sollen, als die 500 Thl. in 4 Monathen. Daher ist hier das Gesuchte größer als das dritte Glied, welches die 4 Monate sind. Daher hat man die Proportion

$$300 \text{ Thl.} : 500 \text{ Thl.} = 4 \text{ Mon.} : x, \text{ oder}$$
$$3 : 5 = 4 \quad x$$

daher $x = \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ Monat.

Die

Die Richtigkeit dieser Proportion erhellet aber so:

Ein gewisses Capital (z. E. 600 Thl.) trägt in einer gewissen Zeit, (z. E. in 4 Mon.) eben so viel Zinse, als ein halb so großes Capital (300 Thl.) in einer doppelt so großen Zeit (8 Monaten); Oder allgemein: das Capital A trägt in der Zeit t eben so viel Zinse, als das Capital $\frac{1}{n}$ A in der Zeit n t; Folglich verhalten sich bey gleichen Zinsen, die Capitalien umgekehrt, wie die Zeiten; deswegen verhält sich das Capital von 600 Thl. zu dem Capital von 300 Thalern, nicht wie 4 Monate zu 8 Monate, sondern umgekehrt wie 8 Monate zu 4 Monate: Folglich auch

300 Thl. : 500 Thl. = 4 Mon. : 6 $\frac{2}{3}$ Mon.

§. 41.

Wenn . . . . 48 Thl.

Es ist 5 Pf. : 6 Pf. = 40 Thl. : x; d. i. 5 Pf. : (5 + 1) Pf. = 40 Thl. : x; folglich

$$x = \frac{40\,(5+1)}{5} = \frac{40 \cdot 5 + 40}{5} = \frac{40 \cdot 5}{5} + \frac{40}{5} = 40 + \frac{40}{5} = 40 + 8 = 48 \text{ Thl.}$$

§. 42.

Es ist nämlich der eine Theil der Zahl e, = $\frac{f+g}{e}$. f und der andere, = $\frac{e}{f+g}$. g; beyde

$\frac{e}{f+g} . f$

sollen

sollen sich aber wie f : g verhalten: folglich ist

$$\frac{e}{f+g} \cdot f : \frac{e}{f+g} \cdot g = f : g$$

Wenn aber $\frac{e}{f+g} \cdot f$ und $\frac{e}{f+g} \cdot g$ würklich diese beyden verlangten Theile der Zahl e sind, so muß ihre Summe = e seyn; dies ist sie aber, wie im Buche bewiesen ist.

Anfänger können diese Aufgabe auch so auflösen: Es sey x und y die beyden Theile der Zahl e, die sich wie f zu g verhalten sollen; so ist

$$1)\ e = x + y$$
$$2)\ f : g = x : y$$

Aus 1) ergiebt sich e — x = y und nach 2) ist f . y = g . x; Sezt man nun in das Product f . y statt y, e — x; so ist

$$f \cdot (e - x) = g \cdot x; \text{ oder}$$
$$fe - fx = gx; \text{ daher}$$
$$fe = gx + fx = (g + f) \cdot x$$

Folglich $x = \frac{f \cdot e}{f+g} = \frac{e \cdot f}{f+g} = \frac{e}{f+g} \cdot f$

Um nun y zu finden, so setze man in e — x = y statt x den ihm gleichen gefundenen Theil $\frac{e \cdot f}{f+g}$; so wird $y = e - \frac{e \cdot f}{f+g} = \frac{e \cdot (f+g) - ef}{f+g}$

$= e$

$$= \frac{ef + eg - ef}{f+g} = \frac{eg}{f+g} = \frac{e}{f+g} \cdot g.$$

§. 43, 44 und 45.

Haben Anfänger das, was im 42. §. ist gesagt worden, verstanden; so werden sie im 43. §. gar keine Schwierigkeit finden. Denn sie sehen leicht, daß wenn $\frac{e}{f+g+h} \cdot f$; $\frac{e}{f+g+h} \cdot g$; $\frac{e}{f+g+h} \cdot h$ die verlangten Theile des Ganzen e sind, ihre Summe = e seyn muß. Dies ist aber, wie eine leichte Rechnung zeigt. Der 44. §. bringt die Auflösung der Aufgabe des 42. und 43. §. auf die Regel Detri; und der 45. § enthält den Beweis davon, den Anfänger leicht verstehen werden.

§. 47.

Die **Gesellschaftsrechnung**, die ein gegebenes Ganze in eine verlangte Anzahl Theile so zu theilen lehrt, daß sich diese Theile eben so verhalten, als wie die Theile, eines andern Ganzen, das in gleichviele Theile getheilt ist, hat ihren Namen von dem häufigen Gebrauch bey Compagniehandlungen, Concursen, Erbtheilungen, Havereyen u. s. w.

Gesezt nun, von den drey Kaufleuten A, B, C, haben zu einer Handlung der Kaufmann A, 1000 Thl.; der B, 700 Thl.; der C, 900 Thl. gegeben; und gewinnen mit allen diesem Gelde zusammen 1500 Thl.: Es frägt sich daher: Wie viel

kommt

kommt einen jedem nach Proportion seiner Einlage, zu?

Man sieht leicht, daß man die Zahl 1500 in drey Theile theilen muß, die sich wie die Zahlen 1000; 700; 900; welche die Einlage angeben, verhalten. Man setze (nach 44) diese drey Theile der Zahl 1500 wären x; y; z; und 1000 = f; 700 = g; 900 = h; so ist 1000 + 700 + 900 = f + g + h = 2600; und x + y + z = e ist = der Zahl 1500; Folglich wird (in 44) aus

$$f + g + h : e = f : x = g : y = h : z$$

nun

$$2600 : 1500 = 1000 : x = 700 : y = 900 : z$$

das ist (nach 40)

$$\begin{aligned} 26 : 15 &= 1000 : x; \\ &= 700 \ : y; \\ &= 900 \ : z; \text{ und} \end{aligned}$$

(wenn man 26 und 1000; 700; 900) durch 2 dividirt)

$$13 : 15 = 500 : x; \text{ daher } x = \frac{15 \cdot 500}{13} = 576 \tfrac{12}{13}$$

$$= 350 : y; \qquad y = \frac{15 \cdot 350}{13} = 403 \tfrac{11}{13}$$

$$= 450 : z; \qquad z = \frac{15 \cdot 450}{13} = 519 \tfrac{3}{13}$$

und $x + y + z = 576 \tfrac{12}{13} + 403 \tfrac{11}{13} + 519 \tfrac{3}{13} = 1500$, wie es seyn soll.

Also

Also bekommt der Kaufmann A, 576 $\frac{12}{13}$ Thl.; der Kaufmann B, 403 $\frac{11}{13}$ Thl.; der Kaufmann C, 519 $\frac{3}{13}$ Thl.

II. Exempel.

Wäre in einem Testamente verordnet, daß der Universalerbe 10000 Thl. an Legaten, und zwar Cajus die Hälfte; Titius den dritten Theil, und Sempronius den vierten Theil auszahlen soll: so frägt sichs: Wie viel einem jeden zukommt? Man erwäge, daß hier die 10000 Thl. so getheilt werden sollen, daß sich die Theile, welche x, y und z heißen mögen, verhalten, wie $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$. Man verfährt hier eben so als wie im vorigen Exempel ist gewiesen worden, und es der 44. §. befielt. Nämlich

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} : 10000 = \frac{1}{2} : x = \frac{1}{3} : y = \frac{1}{4} : z$$

Aber $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$; und $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$; $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; Folglich

$$\frac{13}{12} : 10000 = \frac{6}{12} : x;$$
$$\frac{13}{12} : 10000 = \frac{4}{12} : y;$$
$$\frac{13}{12} : 10000 = \frac{3}{12} : z;$$

das ist (nach 34. I.)

$$\frac{13}{12} : \frac{6}{12} = 10000 : x;$$
$$\frac{13}{12} : \frac{4}{12} = 10000 : y;$$
$$\frac{13}{12} : \frac{3}{12} = 10000 : z;$$

Oder, weil sich Brüche von gleichen Nennern wie ihre Zähler verhalten,

$13 : 6 = 10000 : x$; Also $x = \frac{60000}{13} = 4615\frac{5}{13}$
$13 : 4 = 10000 : y$; $\quad y = \frac{40000}{13} = 3076\frac{12}{13}$
$13 : 3 = 10000 : z$; $\quad z = \frac{30000}{13} = 2307\frac{9}{13}$

Also bekommt Cajus $4615\frac{5}{13}$ Thl.; Titius $3076\frac{12}{13}$ Thl.; Sempronius $2307\frac{9}{13}$ Thl.; Und $4615\frac{5}{13} + 3076\frac{12}{13} + 2307\frac{4}{13} = 10000$ wie es seyn muß.

Hätte man so getheilt, daß

dem Cajus $\frac{1}{2} \cdot 10000$ Thl. $= 5000$ Thl.
dem Titius $\frac{1}{3} \cdot 10000 = 3333\frac{1}{3}$ Th.
dem Sempr. $\frac{1}{4} \cdot 10000 = 2500$ Thl.

zugefallen wäre, so würde der Universalerbe, weil 5000 Thl. $+ 3333\frac{1}{3}$ Thl. $+ 2500$ Thl. $= 10833\frac{1}{3}$ Thl., bey dieser Theilung um $833\frac{1}{3}$ Thl. zu kurz kommen. Diesen Fehler hätte man leicht begehen können, wenn man nicht bedacht hätte, daß diese lezte Theilung nur da statt findet, wo die Summe der Brüche, die das Verhältniß der Theile anzeigen $= 1$ ist. Wäre z. E. im Testamente verordnet gewesen, daß von den 10000 Thalern, dem Cajus $\frac{5}{8}$; dem Titius $\frac{2}{8}$; und dem Sempronius $\frac{1}{8}$ gegeben werden sollte; so hätte man freylich müssen dem Cajus $\frac{5}{8} \cdot 10000$ Thl. $= 6250$ Thl.; dem Titius $\frac{2}{8} \cdot 10000$ Thl. $= 2500$ Thl.; dem Sempronius $\frac{1}{8} \cdot 10000$ Thl. $= 1250$ Thl. (weil die Summe der Brüche $\frac{5}{8}$; $\frac{2}{8}$; $\frac{1}{8}$ nach die das Verhältniß der Theile, in die 10000 zu theilen, gleich 1, ist,) zukommen lassen.

§. 48.

§. 48.

Da also bey guten Schiespulver zu 32 Loth Salpeter, 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel gehören, so sieht man leicht, daß man eben so gutes Schiespulver erhält, wenn man zu 16 Loth Salpeter, 3 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel, nimmt.

Will man 1000 Pfund Schiespulver machen; so frägt sichs: wie viel Salpeter, Kohlen, Schwefel dazu erfodert werden. Die 1000 Pfund sind so zu theilen, daß sich die Theile, die x, y, z seyn mögen, wie 16; 3; 2 verhalten. Es ist daher

$$16 + 3 + 2 : 1000 = 16 : x = 3 : y = 2 : z$$

oder $21 : 1000 = 16 : x$; Also $x = \frac{16 \cdot 1000}{21}$

$= 761 \frac{19}{21}$ Pfund Salpeter;

$21 : 1000 = 3 : y$; Also $y = \frac{3 \cdot 1000}{21}$

$= 142 \frac{13}{21}$ Pf. $= 142 \frac{6}{7}$ Kohlen

$21 : 1000 = 2 : z$; Mithin $z = \frac{2 \cdot 1000}{21}$

$= 95 \frac{5}{21}$ Pf. Schwefel;

Und $761 \frac{19}{21} + 142 \frac{18}{21} = 95 \frac{5}{21} = 1000$ wie gehörig.

§. 49

Des §. 37. Erl. I. und II. Exempel gehört auch hieher.

§. 50

Ist

$$a : b = c : d$$
$$e : f = g : h$$
$$i : k = l : m$$
$$n : o = p : q$$

So ist

$$aein : bfko = cglp : dhmq$$

Denn wegen den angenommenen Proportionen ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$; $\frac{i}{k} = \frac{l}{m}$; $\frac{n}{o} = \frac{p}{q}$; und daher $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{i}{k} \cdot \frac{n}{o} = \frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h} \cdot \frac{l}{m} \cdot \frac{p}{q}$; also $\frac{aein}{bfko} = \frac{cglp}{dhmq}$; woraus die Proportion $aein : bfko = cglp : dhmq$ (nach 16) folgt. Man sieht leicht, daß so viel auch Proportionen vorhanden seyn mögen, doch allemal sich das Product aller ersten Glieder der vorhandenen Proportionen, verhält zu dem Product aller zweyten Glieder derselben, wie das Product aller dritten Glieder, zum Product aller vierten.

§. 51.

$$a : b = c : d$$
$$b : f = d : h$$

Also (nach 69) $ab : bf = cd : dh$ d. i. (nach 21)

$$a : f = c : h$$

Die

Die alten Geometer pflegten sich hier so auszudrücken: Es folge aus den beyden ersten Proportionen (nämlich aus a : b = c : d und b : f = d : h) ordinatim, et ex aequo die dritte (nämlich die a : f = c : h).

§. 52.

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ b : f = g : c \\ \hline ab : bf = gc : dc; \text{ oder (nach 21)} \\ a : f = g : d \end{array}$$

Hier sagten die alten Geometer so: Es folge aus den beyden ersten Proportionen (nämlich aus a : b = c : d und b : f = g : c) perturbate, et ex aequo die dritte (nämlich a : f = g : d)

§. 53.

Wenn ein Capital von 1000 Thalern in 1 Jahre 50 Thaler Zinsen trägt, so trägt eben dieses Capital in 2 Jahren 100 Thaler; und es ist

1 Jahr : 2 Jahr = 50 Thl. : 100 Thl.

Das Capital aber ist die wirkende Ursache, die in der Zeit von 1 Jahre die Wirkung, nämlich die Zinse, von 50 Thalern, und in der Zeit von 2 Jahren die Wirkung oder Zinse von 100 Thaler, hervorbringt. Hier sind also gleiche Ursachen vorhanden, und die Wirkungen verhalten sich daher, wie die Zeiten, in denen sie von den gleichen Ursachen hervorgebracht worden.

Wenn ein Capital von 100 Thl. in 1 Jahre 5 Thaler Zinse trägt, so trägt ein Capital von 400 Thalern in 1 Jahre 20 Thaler Zinse. Daher verhält sich

100 Thl. Capital : 400 Thl. Capital $\doteq$ 5 Thl. Zinse : 20 Thl. Zinse

Hier hat man gleiche Zeiten, und die Capitalien sind die Ursachen, die die Wirkungen oder die Zinsen hervorbringen. Also verhalten sich bey gleichen Zeiten die Ursachen wie die Wirkungen, oder, welches einerley ist, die Wirkungen wie die Ursachen.

Also $7000 \cdot 12 : 13000 \cdot 9 = 4000 : e$

Es ist aber (nach 21)

$$\frac{7 \cdot 1000 \cdot 3 \cdot 4}{1000 \cdot 3} : \frac{13 \cdot 1000 \cdot 3 \cdot 3}{1000 \cdot 3} = 4000 : e$$

folglich $7 \cdot 4 : 13 \cdot 3 = 4000 : e$; Nun ist (nach 34, I)

$7 \cdot 4 : 4000 = 13 \cdot 3 : e$; und (nach 21)

$$\frac{7 \cdot 4}{4} : \frac{4 \cdot 1000}{4} = 13 \cdot 3 : e; \text{ Also}$$

$7 : 1000 = 13 \cdot 3 : e$; und folgl. (34. I)

$7 : 13 \cdot 3 = 1000 : e$.

Die Regel von fünfen oder Regel Quinque, führt daher den Namen, weil sie aus 5 gegebenen Größen die 6te zu finden lehrt. Man kann hier die Regel Detri zweymal anwenden, nämlich einmal mittelst der Proportion, $T : t = E : v$; wo die Interessen, die das Capital von

7000

7000 Thl., in der Zeit von 9 Jahren trägt, gesucht werden, und welche in der izt angeführten Proportion das v bezeichnet; das zweytemal aber vermöge der Proportion C : c = v : e, wo das v durch die erste Regel Detri schon gefunden worden ist; nämlich, vermittelst welcher man die Interesse die das Capital von 7000 Thl. in 9 Jahren trägt, gefunden hat, und nun schließt: Wie sich verhält das Capital von 7000 Thaler zu dem von 13000 Thl.; so verhält sich die Interesse, die das erste Capital in 9 Jahren trägt, zu der Interesse, die das zweyte Capital in eben der Zeit trägt.

Sezt man nun in die Proportion T : t = E : v, für T, t, E, die Werthe, die ihn nach unsern Exempel zukommen, so hat man

$$12 : 9 = 4000 : v; \text{ und also}$$

$$v = \frac{9 \cdot 4000}{12} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1000}{3 \cdot 4} = 3 \cdot 1000$$

d. i. v = 3000 Thl.

Wird aber in die Proportion C : c = v : e die für C, c, v, gehörigen Werthe gesezt, so bekommt man

$$7000 : 13000 = 3000 : e, \text{ oder (nach 21)}$$

$$7 : 13 = 3000 : e; \text{ Also}$$

$$e = \frac{13 \cdot 3000}{7} = 5571 \tfrac{3}{7} \text{ Thl.},$$

wie gehörig.

§. 54.

Man setze, zwey Cörper A und B, bewegen sich gleichförmig, d. i. sie durchlaufen in gleichen Zeiten gleiche Räume. Nun durchlaufe A in einer gewissen Zeit, z. E. in 4 Minuten einen gewissen Raum, z. B. einen von 8 Fuß, B aber in eben der Zeit von 4 Minuten einen noch einmal so großen Raum, einen von 16 Fuß, so wird man ohne Bedenken den Körper B eine noch einmal so große Geschwindigkeit beylegen, als den Körper A.

Hier hat man gleiche Zeiten, und wird, nach dem zweyten Grundsatze im 53. §. leicht schliessen, daß sich bey einem Paar Körpern, (A und B,) die Geschwindigkeiten, (C, und c,) wie die Räume (v und e) verhalten. Also ist

$$C : c = v : e$$

Wenn nun die Körper A und B, gleichgroße Räume zurücke legten, und zwar B durchliefe seinen Raum in 4 Minuten Zeit, wenn A seinen in 12 Minuten = 3 . 4 Minuten, das ist, in dreymal mehr Zeit, durchliefe; so wird man, ohne Bedenken, sagen: B läuft dreymal geschwinder als A; oder dem B seine Geschwindigkeit, ist dreymal größer, als dem A seine; und nach den ersten Grundsatz des 53. §. schließen: daß sich die Geschwindigkeit des B, zu der Geschwindigkeit des A verhält, wie die Zeit in der A seinen Weg durchläuft, zu der Zeit, in der B seinen Weg zurückelegt: das heißt aber nichts anders als: die Geschwin-

schwindigkeiten verhalten sich verkehrt, wie die Zeiten. Ist die Geschwindigkeit des B; = C, und die dazu gehörige Zeit = t; die Geschwindigkeit des A aber, = c und die Zeit = T; so ist

$$C : c = T : t.$$

Gesezt nun, man habe zwey Körper M und N, von den man weiß, daß M in der Zeit T, den Raum e zurück lege, und N in der Zeit t den Raum e, und man wollte wissen, wie sich die Geschwindigkeit C des Körpers M, zu der Geschwindigkeit c des N verhielte; so muß man setzen, daß ein dritter Körper α, sich mit der Geschwindigkeit γ in der Zeit t, in der N sich bewegt durch den Raum v den M durchläuft bewegen. Alles dieses nun vorausgesezt: so sieht man leicht, daß

$$\gamma : C = T : t$$

und

$$c : \gamma = e : v$$

Also, (weil $\gamma : C = T : t$ und
$c : \gamma = e : v$

$\gamma c : C\gamma = Te : tv$ das ist
$c : C = Te : tv$

Mithin verhält sich die Geschwindigkeit des Körpers N zu der Geschwindigkeit des Körpers M, wie das Product T e, (das entsteht, wenn man die Zeit in der M sich durch B bewegt multiplicirt in den Raum, den N durchläuft,) zu dem Producte tv, (das sich ergiebt, wenn die Zeit in der N sich

durch e bewegt multiplicirt wird in den Raum den M in der Zeit T zurücke legt.)

Es sey T = 8 Min.; e = 4 Fuß; t = 3 Min. v = 12 Fuß; so ist

$$c : C = 8 . 4 : 3 . 12 \text{ d. ist}$$
$$c : C = 32 : 36 = 8 : 9$$

Mithin verhält sich die Geschwindigkeit des Körpers N zur Geschwindigkeit des M wie 8 zu 9; d. h. in der Zeit da N, 8 Fuß zurücke legt, in eben der Zeit durchläuft N, 9 Fuß.

Wenn man die lezten Glieder der Proportion

$$c : C = Te : tv$$

mit Tt multiplicirt, so erhält man (nach 21)

$$c : C = \frac{Te}{Tt} : \frac{tv}{Tt} \text{ oder}$$

$$c : C = \frac{e}{t} : \frac{v}{T}$$

d. h. die Geschwindigkeiten zweyer Körper M und N verhalten sich wie die zurückgelegten Räume durch die Zeiten dividirt.

Sezt man für e, t, v, T, die vorigen Werthe, so hat man

$$c : C = \tfrac{4}{3} : \tfrac{12}{8}; \text{ d. i.}$$
$$c : C = \tfrac{4}{3} : \tfrac{3}{2}$$

Bringt man die Brüche $\frac{4}{3}$ und $\frac{3}{2}$ unter einerley Benennung, so hat man

c : C

$$c : C = \frac{8}{6} : \frac{9}{6}$$

Aber Brüche von einerley Nenner verhalten sich wie ihre Zähler (nach 22); Folglich ist

$$c : C = 8 : 9$$

wie gehörig.

§. 55.

Wenn in der Proportion $CT : ct = E : e$, $E = e$; so schlüßt man leicht (nach 17) daß auch $CT = ct$ seyn müsse. Dies können Anfänger sich auch so überzeugen: Bey der Proportion $CT : ct = E : e$, ist das Product $CT \cdot e =$ dem Producte $ct \cdot E$. Nun soll aber $E = e$ seyn; und da Gleiches durch Gleiches dividirt, gleiche Quotienten giebt; so ist folglich

$$\frac{CT \cdot e}{e} = \frac{ct \cdot E}{E} \text{ oder}$$

$$C \cdot T = ct.$$

Wie gehörig.

Hier hat man zwey gleiche Producte; aus diesen kann (nach 33) eine Proportion gemacht werden, zu der das eine Product (CT) die äussern Glieder, das andere (ct) aber die mittlern, abgiebt; Folglich

$$C : c = t : T$$

Bey gleichen Wirkungen also, verhalten sich die Ursachen umgekehrt wie die Zeiten; oder, wel-

ches einerley ist, die Zeiten verhalten sich umgekehrt wie die Ursachen.

Wenn eben so viel Arbeit in 7 Tagen durch 13 Arbeiter hervorgebracht wird, als in 4 Tagen durch u Arbeiter geschiehet, so sieht man leicht, (da sich bey gleichen Wirkungen die Zeiten umgekehrt wie die Ursachen verhalten,) daß

4 Tage : 7 Tage = 13 Arb. : u Arb.

welches das Exempel in der Anmerkung des 49. §. ist, und das also durch die Proportion $C : c = t : T$ oder $t : T = C : c$ gerechtfertiget wird.

Jmgleichen . . . . findet.

$$CT : ct = E : e$$

Also $CT \cdot e = ct \cdot E$ (nach 33)

$$\frac{CT \cdot e}{T} = \frac{ct \cdot E}{T} \text{ oder}$$

$$Ce = \frac{ct \cdot E}{T} \text{; und}$$

$$\frac{Ce}{t} = \frac{ct \cdot E}{T \cdot t} \text{ folglich}$$

$$\frac{Ce}{t} = \frac{cE}{T} \text{ oder}$$

$$C \cdot \frac{e}{t} = c \cdot \frac{E}{T}$$

Also (nach 33) $C : c = \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$ oder

E :

$$\frac{E}{T} : \frac{e}{t} = C : c, \text{ d. ist}$$

(nach 19) $\frac{e}{t} : \frac{E}{T} = c : C$

Ist, wie im Buche $c = 100$; $e = 21$; $3 = t$; $63 = E$; $5 = T$; so ist

$$\frac{21}{3} : \frac{63}{5} = 100 : C \text{ oder}$$

(nach 22) $35 : 63 = 100 : C$; also

$$e = \frac{63 \cdot 100}{35} = \frac{7 \cdot 9 \cdot 20 \cdot 5}{7 \cdot 5} = 9 \cdot 20 = 180.$$

§. 56.

Wenn man sagt, daß z. E. 3 Mariengroschen = 2 ggr. sind, so giebt man hierdurch eigentlich das Verhältniß des Mariengroschen zum Gutengroschen an. Denn bey der Gleichung

3 Mariengroschen = 2 Ggr.

Hat man zwey gleiche Producte (denn 3 Mariengroschen ist gewiß einerley mit 3 × 1 Mariengroschen ꝛc.) Aber aus zwo gleichen Producten kann man (nach 33) eine Proportion machen; folglich

3 : 2 = Ggr. : Mariengr.

oder auch 2 : 3 = Mariengr. : Ggr.

Und

Und so werden Anfänger verstehen, wie aus den im Buche gegebenen Münzgleichungen, die daselbst befindlichen Proportionen entstanden sind; nämlich folgende

2 : 3 = Marg. : Ggr.
1 : 16 = Ggr. : Gulden
2 : 3 = Gulden : Thaler
4 : 11 = Thaler : Ducaten

Hieraus wird (nach 50) 2 . 1 . 2 . 4 : 3 . 16 . 3 = Marggr. × Ggr. × Gulden × Thaler : Ggr. × Gulden × Thaler × Ducaten

oder (nach 21) 2 . 1 . 2 . 4 : 3 . 16 . 3 . 11 = Margr. : Ducaten d. i.

1 . 16 : 16 . 99 = Margr. : Ducaten

$\frac{1 . 16}{16} : \frac{16 . 99}{16}$ = Margr. : Duc.

d. i. 1 : 99 = Margr. : Ducaten.

Also 1 Ducaten = 99 Margr.

Fernere Exempel.

Wenn 9 Louisd'or = 16 Ducaten, 1 Ducaten = 9 Mark, und 3 Mark, = 1 Thl. ist, so frägt sichs: erstlich wie viel Thaler einen Louisd'or ausmachen, und zweitens, wie viel Louisd'or 10000 Thl. betragen? Die Rechnung, welche sich aus dem vorhergehenden leicht begreifen läßt, ist folgende:

16 : 9 = Luisd'or : Ducaten
9 : 1 = Ducaten : Mrk.
1 : 3 = Mrk. : Thaler; Also

16 . 9 . 1 : 9 . 3 = Louisd'or : Thaler; oder (nach 21)

$$\frac{16 \cdot 9}{9} : \frac{9 \cdot 3}{9} = \text{L.} : \text{Thl.}; \text{ d. i.}$$

16 : 3 = L. : Thl.;

Folglich 3 Louisd'or = 16 Thaler.

Daher ist 16 Thl. : 10000 Thl. = 3 L. : x;

$$\text{Mithin } x = \frac{30000}{16} = 1875 \text{ Louisd'or.}$$

Also ist 10000 Thl. = 1875 Louisd'or.

Wenn das alte Freybergische Lachter, das L heißen mag, = 74, 5 Rheinländische Zoll ist; so ist 10 L = 745 Rheinl. Zoll. Ist nun das Clausthalische Lachter = 73, 6294 Rheinländische Zolle; so sind 10000 Clausthalische Lachter = 736194 Rheinländische Zolle. Es ist die Frage: was für eine Verhältniß das alte Freybergische Lachter gegen das Clausthalische habe?

Folgende Rechnung wirds zeigen:

745 : 10 = L : Rheinlzoll.
10000 : 736194 = Rheinlz. : Clausthallr.

Also 745 . 10000 : 10 . 736194 = L : Clausthllr.
oder 745000 : 736194 = L : Clausthllr.
d. i. 372500 : 368097 = L : Clausthllr.

Folglich

Folglich

372500 Clausthllr. = 368097 Freybergische Lachter.

Mithin

$\frac{372500}{368097}$ Clausthllr. = 1, 01223 . . .

Clausthallr. = dem alten Freybergischen Lachter; und

$\frac{368097}{372500}$ L = Clausthllr. = 0, 98817 . L.

Erläute-

Erläuterungen der Kästnerischen Arithmetik

VI. Capitel.

Von der Zusammensetzung der Verhältnisse, den Reihen, und den Logarithmen.

§. 1.

Man stelle sich vor, eine gewisse Größe a, verändere sich entweder durch Vermehrung oder Verminderung. Indem dieses geschiehet, so muß aus a eine andere Größe, die b heißen mag, entstehen, und a zu b eine gewisse und bestimmte Verhältniß, (nämlich a : b) haben, oder, welches einerley ist, a nach der Verhältniß a : b verändert worden seyn. Sezt man daß sich b, abermals verändere, so wird dadurch aus b eine andere Größe, die wir e nennen wollen, und man erhält nun, die Verhältniß b : e, als diejenige, nach welcher b ist verändert worden, um e zu werden. Durch diese Veränderungen also, entsteht aus a die Größe e; und folglich mit ihr zugleich die Verhältniß a : e, oder diejenige nach welcher a ist verändert worden, um e zu werden. Aber, ehe die Verhältniß a : e entstund, d. h. ehe e aus a wurde, mußte a erst nach der Verhältnis a : b,

und dann b : e verändert werden, d. i. es mußte aus a, erst b, und aus b, alsdann e entstehen. Daher ist die Verhältniß a : e durch die a : b und zugleich auch durch die b : e entstanden: Folglich muß a : e die beyden Verhältnisse a : b und b : e enthalten, und man sagt nun, daß die Verhältniß a : e aus den beyden Verhältnissen a : b und b : e zusammen gesezt seyn, d. h. a verhält sich zu e, wie a zu b und auch zugleich wie b zu e. Dies aber bezeichnet man durch

$$a : e = (a : b) + (b : e).$$

Wenn a = 3 ist, und aus 3 die 12, entsteht, aus 12 aber 60 wird, so ist nach vorhergehender Betrachtung 3 : 60 = (3 : 12) + (12 : 60) Da 3 : 12 gleich 1 : 4 und 12 : 60 gleich 3 : 15, so wird, wenn man in (3 : 12) + (12 : 60) statt 3 : 12 die 1 : 4; und statt 12 : 60 die 3 : 15 sezt, nun 3 : 60 = (1 : 4) + (3 : 15), oder weil 3 : 15 = 1 : 5; so wird auch 3 : 60 = (1 : 4) + (1 : 5); woraus man schon sieht, daß bey einer zusammengesezten Verhältniß eben nicht allemal nothwendig ist, daß das folgende Glied der ersten Verhältniß (3 : 12) gleich dem vorhergehenden der zwoten Verhältniß (12 : 60) sey.

§. 3.

ac : bd = a : e; aber die Verhältniß a : e ist (nach 1. §.) aus den Verhältnissen a : b und b : e zusammengesezt, oder a : e = (a : b) + (b : e); folglich

ac :

$$ac : bd = (a : b) + (b : e)$$

Da nun $c : d = b : e$; so ist die Verhältniß $b : e$, gleich der $c : d$; und daher $(a : b) + (b : e) = (a : b) + (c : d)$; folglich

$$ac : bd = (a : b) + (c : d)$$

Also ist das Verhältniß zweyer Producte (ac und bd) aus den Verhältnissen ihrer Factoren (a, b, c, d) zusammengesezt.

Da a und c, die vorhergehenden Glieder der beyden Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ sind, und b, ihre nachfolgenden; so folgt: daß, wenn man die vorhergehenden Glieder zwoer gegebenen Verhältnisse ($a : b$ und $c : d$) mit einander multiplicirt, und das auch bey ihren nachfolgenden Gliedern thut, man eine Verhältniß ($ac : bd$) erhält, die der aus den gegebenen Verhältnissen zusammengesezten Verhältniß gleich ist; Oder die zusammengesezte Verhältniß ist allezeit derjenigen gleich, welche aus dem Producte ihrer vorhergehenden Glieder zum Producte ihrer nachfolgenden, entsteht.

Nach dem 1. §. ist $a : e = (a : b) + (b : e)$

Aber nach dem itzigen ist $(a : b) + (b : e) = ab : be = a : e$.

Wäre nun $a : e = (a : b) + (c : d)$ so ist $a : e = ac : bd$, und daher $\frac{a}{e} = \frac{ac}{bd}$; = dem Expo-

nenten der zusammengesezten Verhältniß ac : bd oder (a : b) + (c : d).

§. 4

a : b = a : b; nun sey
c : d = b : q; daher

ac : bd = a : q; und (nach 3)
ist ac : bd = (a : b) + (c : d) = a : q

Aber a : q = a : q; und
e : f = q : r gesezt, giebt

ae : qf = a : r =
(a : q) + (e : f); da nun
a : q = ac : bd; und
e : f = e : f; so ist

ae : qf = ace : bdf; folglich ace : bdf = a : r = (a : q) + (e : f)
= (a : b) + (c : d) + (e : f) (weil a : q = (a : b) + (c : d) ist); Nun ist

a : r = a : r; und es sey
g : h = r : s; so wird

ag : rh = a : s = (a : r) + (g : h)

Da aber

a : r = ace : bdf und
g : h = g : h; so ist

ag : rh = aceg : bdfh

folglich aceg : bdfh = a : s = (a : r) + (g : h) = (a : b) + (c : d) + (e : f) + (g : h); und weil

c : d

$c : d = b : q$; $e : f = q : r$; $g : h = r : s$; so ist auch

$$(a : b) + (c : d) + (e : f) + (g : h) =$$
$$(a : b) + (b : q) + (q : r) + (r : s)$$

Man sieht leicht, daß dergleichen Zusammensetzung der Verhältnisse allemal statt findet, so viel auch Verhältnisse vorhanden seyn mögen; und daher kann man überhaupt schließen: daß die Verhältniß des Products aller vorhergehenden Glieder zum Producte aller folgenden, aus allen gegebenen Verhältnissen zusammengesezt sey.

§. 9.

Wenn $p = 1$; so ist $1 : q = q : r = r : s$; aber $r = q^2$; folglich wird aus $1 : q = r : s$ nun $1 : q = q^2 : s$ und daher $s = q^3$; mithin $1 : q = q : q^2 = q^2 : q^3$; Da nun $1 : q^3 = (1 : q) + (q : q^2) + (q^2 : q^3)$ und die Verhältnisse $q : q^2$; $q^2 : q^3$, gleich der $1 : q$ sind; so ist $1 : q^3 = (1 : q) + (1 : q) + (1 : q) = 3(1 : q)$; und $1 : q = \frac{1}{3}(1 : q^3)$.

Daher ist die Verhältniß der 1 zum Würfel, dreymal so groß als die der 1 zur Wurzel; und die Verhältniß der 1 zur Cubicwurzel ist ein Drittheil der Verhältniß der 1 zum Würfel.

*) Erinnerung wegen der zusammengesez- ten Verhältnisse und ihrer Bezeichnung.

„Die Zusammensetzung der Verhältnisse pflegt „Anfängern insgemein schwer vorzukommen, und „auch unter denen, die es übel nehmen würden, „wenn man sie zu den Anfängern zählen wollte, „wird man einige finden, die von dieser Zusam- „mensetzung, und dem, was daraus gefolgert wird, „die gehörigen Begriffe nicht haben. Die Haupt- „ursache ist, daß man in vielen Lehrbüchern, die „zum Theil noch gebraucht werden, die Zusam- „mensetzung der Verhältnisse theils gar nicht, „theils unvollständig oder gar unrichtig abgehan- „delt findet. Das Wesentliche der Sache hat „Herr Hofrath Kästner in den ersten 9 Abschnitten „des VI. Capitels der Arithmetik kurz aber sehr „bündig vorgetragen; und wer diese wenigen Sätze „wohl überdenkt, dem werden alle Schwierigkeiten „verschwinden, und er wird bey Vergleichung, Zu- „sammensetzung und Trennung, Vervielfa- „chung und Theilung der Verhältnisse, das „heißt, bey dem was in der Arithmetik und Geo- „metrie das Wichtigste ist, nirgends anstoßen.

„Wegen der Bezeichnung bey Zusammensetzung „der Verhältnisse ist zu merken, daß die von Herrn „Hofrath Kästner in der ersten Erklärung ange- zeigte,

*) Diese Erinnerung ist mir von Herrn M. Hindenburg auf mein Ersuchen mitgetheilt worden.

„zeigte, nicht die einzige, durchgängig gebräuchli„che, sey. Einige schreiben blos die Factoren in „die einzelnen Glieder der zusammengesezten Ver„hältniß, und setzen mit **Worten** und ohne sich „eines besondern **Schriftzeichens** zu bedienen, „hinzu, aus was für Verhältnissen die angezeigte „zusammengesezt sey; wie Newton, Maclaurin, „und überhaupt die Engländer nach dem Beyspie„le der Alten. Andere, wie Herr Hofrath Kar„sten in seinen sehr gründlich abgefaßten Anfangs„gründen der Mathematik S. 266, §. 291, um „auszudrücken, daß z. E. die Verhältniß (1) a : e „aus den Verhältnissen a : b und b : e zusammen„gesezt sey, schreiben dafür

$$a : e = \begin{Bmatrix} a : b \\ b : e \end{Bmatrix}, \text{ und so bedeuten auch (3)}$$

$$ac : bd = \begin{Bmatrix} a : b \\ c : d \end{Bmatrix} \text{ und (4) } a : f = \begin{Bmatrix} a : b \\ c : d \\ e : f \\ g : h \end{Bmatrix}$$

„daß die Verhältnisse linker Hand des Gleichheits„zeichens aus den einzelnen einfachen, rechter Hand „desselben zusammengesezt sind.

„Unstreitig ist auch hier, wie in andern Fällen, „die Bezeichnung willkührlich; und so kann jede „etwas Eignes haben, wodurch sie sich empfiehlt. „So ist z. E. die vom Herrn Hofrath Kästner an„genommene Zeichnung, nach welcher die einzel„nen Verhältnisse, die die zusammengesezte aus-

„machen, durch + verbunden und neben einander „gesezt werden (deren sich auch Hausen Elem. „Math. S. 56 u. f. und Bärmann Eucl. L. V. „Def. V. bedient haben) sehr bequem für den „Druck, weil sie nicht, wie die vom Herrn Hof- „rath Karsten gebrauchte, die Zeile trennt; auch „kann sie nie zum Irrthume verleiten, wenn man bey „ihr auf die Bedeutung des Zeichens denkt, und „Verhältnisse vom Quotienten unterscheidet (1), „um nicht (welches freylich bey einfachen Verhält- „nissen durchgehends geschehen kann) aus a : e = „(a : b) + (b : e) etwa zu folgern, daß auch

$\frac{a}{e} = \frac{a}{b} + \frac{b}{e}$ sey. Dafür bedarf aber auch hin-

„gegen die vom Herrn Hofrath Karsten angenom- „mene Bezeichnung dieser Aufmerksamkeit nicht, „und zeigt zugleich dadurch, daß alle einzelne Ver- „hältnisse unter einander stehen, wie die Glieder „müssen zusammen genommen werden, um die zu- „sammengesezte Verhältniß aus den einfachen her- „vorzubringen.

„Beyde Vortheile mit einander zu vereinigen, „und die Analogie, die bey Behandlung der ein- „zelnen absoluten Größen und der Verhältnisse „durchgängig statt findet, auch hier aufs deutlich- „ste zugleich mit darzustellen, bediene ich mich bey „Zusammensetzung der Verhältnisse einer eignen „Bezeichnung; wenigstens ist mir nicht bekannt, „daß sie von irgend Jemanden schon wäre ge- „braucht worden. Ich setze nämlich (und hierauf

hat

„hat mich die Euklideische Erklärung der zusam„mengesezten Verhältniß Elem. VI. Def. V. un„mittelbar geleitet; wie man auch immer das dar„inne schwierige Wort πηλικότης mit den Ausle„gern erklären will) die einzelnen rationes compo„nentes, woraus die composita besteht, wie Fac„tores neben einander, und schreibe z. E. für die „obigen Verhältnisse

a : e = (a : b) (b : e) und ac : bd = (a : b) (c : d)

„und eben so a : f = (a : b) (c : d) (e : f) (g : h); „und so ist dann auch hier, wie bey den einfachen „Verhältnissen, erlaubt, z. E. aus

$$a : e = (a : b) (b : e)$$

„zu folgern, daß auch seyn müsse

$$\frac{a}{e} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{e};$$

„welches die Euklideische Definition selbst ist, „wenn πηλικότητες das bedeuten, was wir izt Ex„ponenten nennen: will man aber darunter die „verglichenen Größen selbst verstehen, so folgt „der erste Ausdruck daraus unmittelbar.

„Man kann die zusammengesezte Verhältniß „als ein Ganzes ansehen, das aus mehrern ein„zelnen Verhältnissen, wie aus Theilen besteht; „und so hat allerdings das Zeichen + bey dieser „Zusammensetzung seine angemessene Bedeutung,

„und kann (wie Hausen a. a. O. und König in sei„ner Appendice de la Composition et Décompo„sition des Raisons zum 5ten Buch der Eukl. „Elemente; 2te Ausg. Haag 1758. S. 224 und „226 gethan haben) auf die Art gerechtfertiget „werden. Da aber die zusammengesezte Verhält„niß aus den einfachen durch **Multiplication** „(λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασι„ασθεῖσαι), wie ein **Product** aus seinen **Fac„toren**, entstehet, so hat mich dieses um so mehr „bewogen, auch diese einzelnen Verhältnisse wie „Factoren neben einander zu setzen und zu bezeich„nen. Das Wort **zusammensetzen** (das frey„lich sehr häufig von Verbindung der Größen „durch die Addition gebraucht wird) wird näm„lich bey der **zusammengesezten Verhältniß** „in eben dem Verstande, wie bey der **zusammen„gesezten Zahl** (σύνθετος ἀριθμός) genommen, „und bezieht sich auf Factoren aus Verhält„nissen oder Zahlen; nur kann man jede Verhält„niß, wenn man will, als eine zusammengesezte „aus jeder verlangten Anzahl von Verhältnissen „ansehen, welches bey den einzelnen Zahlen nicht „willkührlich ist, so lange man, wie hier voraus„gesezt wird, bey ganzen Zahlen bleibt.

„Hier will ich noch in einigen, zu dem 5 — 9. „Abschnitte gehörigen Sätzen kürzlich zeigen, wie „die dort gebrauchten Ausdrücke, für diese neue „Bezeichnung, sich hier abändern:

[5 Zus.] (f : h) (g : g) = fg : hg = „f : h; also bringt die Verhältniß der Gleichheit „g : g oder 1 : 1 bey der Zusammensetzung der Ver„hältnisse keine Veränderung, kein neues Ver„hältniß herfür; eben so wie die 1 bey den Zahlen.

[6 Zus.] (f : h) (g : k) (k : g) = fgk : „hkg = f : h; also müssen die Verhältnisse „g : k und k : g, von denen eine die **umgekehr„te** (ratio inuersa; Euclid. Elem. V. Defin. XIII.) „der andern ist, in der Zusammensetzung eine Ver„hältniß der Gleichheit geben; so wie $k \cdot \frac{1}{k}$ „= 1 bey den Zahlen ist. Man findet auch wirk„lich (k : g) (g : k) = kg : gk = 1 : 1. Auch kann „man $k : g = \frac{1}{g} : \frac{1}{k} = \frac{1 : 1}{g : k}$ setzen; denn mit „dem Verhältnisse g : k multiplicirt, kommt „(g : k) (k : g) = 1 : 1, wie vorhin.

„Kann man auch hier sagen, **die verkehrte „Verhältniß sey die negative der ordentli„chen**? was heißt eigentlich eine negative Ver„hältniß? und wie muß man sie nehmen? Das „wird folgendes entscheiden.

Aus der geometrischen Reihe

$$\ldots \frac{1}{e^4}, \frac{1}{e^3}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}, 1, e, e^2, e^3, e^4 \ldots$$

„nehme man irgend zwey Glieder nach Gefallen, „z. E. 1 und e^3. Nimmt man nun ihre Ver-

„hältniß $1 : e^3$ für eine positive directe Verhält-
„niß, so ist $e^3 : 1$ die umgekehrte, und die ne-
„gative oder entgegengesezte kann keine andere
„als $1 : \frac{1}{e^3}$ seyn; wenn man die Bedeutung der
„Wörter positiv und negativ nicht ändern will.
„Folglich ist auch, nach dem Verfahren, wie man
„entgegengesezte Größen durch einander ausdrückt,
„$1 : e^3 = -(1 : \frac{1}{e^3})$, oder, weil die verkehrte
„Verhältniß $e^3 : 1$ von der negativen $1 : \frac{1}{e^3}$
„nur der Gestalt nicht aber dem Werthe nach
„verschieden ist, auch $1 : e^3 = -(e^3 : 1)$ oder
„$e^3 : 1 = -(1 : e^3)$; daß also auch hier der
„Saz wahr bleibt: ratio reciproca est directae
„negatiua.

„Das Zeichen — vor den Verhältnissen deu-
„tet also an, daß das Entgegengesezte der Ver-
„hältniß vor welcher das Zeichen steht, jener an-
„dern gleich sey, die auf der andern Seite des
„Gleichheitszeichens befindlich ist; und es ist kei-
„nesweges $-(1 : e^3) = -1 : e^3$; Verhältnisse
„wie $-1 : e^3$ oder $+1 : -1$ nennte Leibnitz
„imaginäre, und schloß sie von der Reihe der
„wahren Verhältnisse aus. Opp. T. III. p. 439.
„Hausen El. Mathes. p. 19, 20, 21 vertheidigt
„die Realität solcher Verhältnisse und nennt sie
„entgegengesezte d. i. negative Verhältnisse, in
so

„so fern man $1 : e^3$, oder $1 : 1$ positive nennt;
„wider das, was gleich izt ist dargethan worden.
„Der Verhältniß $1 : e^3$ ist ganz gewiß nicht —
„$1 : e^3$ sondern $1 : \frac{1}{e^3}$ oder $e^3 : 1$ entgegengesezt;
„und so kann auch nicht $-6 : +2$ als eine ne-
„gative, oder der positiven $+6 : +2$ entgegen-
„gesezte Verhältniß angesehen werden, wie a. a.
„O. behauptet wird.

„Vergleichungen entgegengesezter Größen kann
„man ganz gewiß nicht in dem Verstande Ver-
„hältnisse nennen, in dem Euklides das Wort
„nimmt. Ueberhaupt ließe sich Leibnitzens Be-
„hauptung noch mit andern Gründen unterstützen,
„wenn hier der Ort dazu wäre. Die Realität
„negativer oder verneinter Größen, und die Wahr-
„heit des Satzes $+1 : -1 = -1 : +1$ bliebe
„dennoch dabey unangetastet.

[7. Zus.] „Wenn $p : q = q : r$, also beyde
„Verhältnisse einander gleich sind, so ist $p : r =$
„$(p : q)(p : q) = p^2 : q^2 = (p : q)^2$, oder $p : r$
„ist doppelt so hoch, die verdoppelte Verhält-
„niß von $p : q$; duplicata (nicht dupla) rationis
„$p : q$. Man kann sich hier gleichsam gleiche Stu-
„fen vorstellen, auf denen man von p auf q und
„von q auf r steigt, die also von p auf r eine noch
„~~viermal~~ so große Entfernung geben, als zwischen
„p und q ist.

[8. Zus.]

[8. Zus.] „Aus $p : s = (p : q)^2$ folgt $p : q = p^{\frac{1}{2}} : s^{\frac{1}{2}} = (p : s)^{\frac{1}{2}}$ oder die Verhältniß $p : q$ ist „halb so hoch als die Verhältniß $p : s$; subduplicata (nicht subdupla) rationis $p : s$.

[9. Zus.] „Ueberhaupt kann für eine jede Reihe von Größen a, b, c, d, e, f, g . . . ω, wie „man sie nur auch immer zusammenordnet, die „Verhältniß jeder zwey nicht unmittelbar auf einander folgender Glieder, als ein, aus stetigen „Verhältnissen der Mittelglieder, zusammengesetztes angesehen und ausgedrückt werden. So „ist z. E.

$a : c = (a : b)(b : c)$ und $a : d = (a : b)(b : c)(c : d)$

„und eben so $a : e = (a : b)(b : c)(c : d)(d : e)$; „u. s. w.

„und wenn die Verhältnisse jeder zwey auf einander folgenden Glieder durchgängig einander gleich „sind, so sind auch

$a : c = (a : b)^2$ und $a : d = (a : b)^3$ und $a : e = (a : b)^4$ u. s. w.

„oder diese Verhältnisse sind in ratione duplicata, triplicata, quadruplicata u. s. w. der Verhältniß a : b (Eucl. L. V. Def. X. et XI.) und „hieraus folgt rückwärts

$a : b = (a : c)^{\frac{1}{2}} = (a : d)^{\frac{1}{3}} = (a : e)^{\frac{1}{4}}$ u. s. w.

oder,

„oder, daß a : b in ratione subduplicata, subtri-
„plicata, subquadruplicata u. s. w. der hier an-
„gezeigten Verhältnisse stehe.

„So viel von der Zusammensetzung und „Theilung der Verhältnisse, wie man das zulezt „angezeigte Verfahren nennt. Hierdurch haben „die Alten, besonders Archimedes und Apollonius, „Wunderdinge verrichtet, von denen man sich gar „keine Vorstellung machen kann, wenn man ihre „Schriften nicht gelesen hat, zu welchen Euklids „Elemente und Data als nothwendige Vorberei-„tung gehören; und ob gleich in unsern Zeiten „durch Einführung der Gleichungen der Weg den „man sonst durch die Verhältnisse wandeln mußte, „in vielen Fällen sehr ist abgekürzt worden: so ist „doch nicht zu läugnen, daß man durch einsichts-„volle Behandlung der Verhältnisse oft näher zum „Zweck geleitet wird, und verdrüßlichen Rechnun-„gen ausweichen kann. Hierbey ist gleichwohl „noch, wie ich bemerkt habe, die Auflösung einer „Aufgabe zurück geblieben, die in ihrer Art für „die geometrische Analysis gewiß eben so wichtig „ist, als die allgemeine Auflösung der Gleichun-„gen in der Algebra seyn würde, ohne vielleicht „eben so schwer zu seyn. Sie hängt ganz von „Euklids Datis ab, und könnte auf den Fall die „lezte Aufgabe dieses vortreflichen Werkes aus-„machen.

„Noch eine Anmerkung.

„Weil $ac : bd = (a : b)(c : d) = (a : d)(c : b)$

so

„so führt eine Proportion, wie $ac : bd = eg : fh$
„auf folgende vier Vergleichungen

$$(a : b)(c : d) = (e : f)(g : h) \quad A$$
$$(a : b)(c : d) = (e : h)(g : f) \quad B$$
$$(a : d)(c : b) = (e : f)(g : h) \quad C$$
$$(a : d)(c : b) = (e : h)(g : f) \quad D$$

„die sich einzeln wieder auf verschiedene Art ver„ändern lassen. Man wähle eine willkührlich z. „E. B, so folgt, nach der hier gebrauchten Be„zeichnung, nach welcher alle Verhältnisse als Fac„toren anzusehen sind,

$$\frac{(a : b)}{(e : h)} = \frac{(g : f)}{(c : d)} \text{ d. i. } \frac{a}{e} : \frac{b}{h} = \frac{g}{c} : \frac{f}{d}.$$

oder $\frac{(c : d)}{(e : h)} = \frac{(g : f)}{(a : b)}$ d. i. $\frac{c}{e} : \frac{d}{h} = \frac{g}{a} : \frac{f}{b}$

„weil bey der Division der Verhältnisse die ho„mologen Glieder derselben eben so durch einan„der dividirt, als bey der Multiplication mit „einander multiplicirt werden. Eben so folgt „auch $(a : b) : (e : h) = (g : f) : (c : d)$ und

$$\frac{(a : b)(c : d)}{(e : h)} = (g : f) \text{ oder } \frac{(a : b)(c : d)}{(g : f)} =$$

„$(e : h)$ *) u. s. w. welches also gerade zu auf ei-
ne

*) Wollte man sich dieses alles in Zahlen erläutern, so müßte man solche nehmen, die der Proportion $ac : bd = eg : fh$ genug thun; dergleichen

„ne Regel Detri für die Verhältnisse führt. Man „kann nämlich auch die Verhältnisse, wie die „Zahlen, zu einander addiren, von einander sub„trahiren, in einander multipliciren, durch einan„der dividiren; man kann sie zu Potenzen erhö„hen und ihre Wurzeln suchen, welches man ins„gemein die Verhältnisse **vervielfachen** und **thei„len** nennt. Hierüber hat Gregorius a S. Vin„centio ein eignes umständliches Werk de Pro„portionalitatibus geometrtcis; Opp. Libro VIII. „in 6 Abtheilungen geschrieben, wo er besonders „im 5ten Theile de his, quae Proportionalitati„bus communia sunt cum operationibus Arith„meticis gehandelt hat; welches weitläuftige ganz „synthetische Werk gleichwohl noch zugleich ver„mehrt und abgekürzt werden könnte. Da nun „aber bey den Verhältnissen alle arithmetische Ope„rationen vorkommen können, so scheint es auch „in dieser Rücksicht gut zu seyn, mit Beybehal„tung der gewöhnlichen Zeichen für diese Opera„tionen, der Verhältnisse a : b und c : d wirkliche

„**Addition**, durch $(a : b) + (c : d)$; **Sub„traction**, durch $(a : b) - (c : d)$ **Multiplica„tion**, durch $(a : b)\ (c : d)$; **Division**, durch „$(a : b) : (c : d)$ *); **Potenz** m, durch $(a : b)^m$;

Wurzel

chen wären z. E. wenn man, nach der Ordnung, für die Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h, die Zahlen 3, 8, 4, 9, 1, 2, 5, 15 sezte.

*) oder durch $\frac{(a : b)}{(c : d)}$ wie einen Bruch.

„Wurzel n, durch $(a:b)^{\frac{1}{n}}$ als auf andere Art,
„auszudrücken und anzuzeigen. Folglich ist, um
„auch hier ein Beyspiel der Addition und Sub-
„traction zu geben,

$$(a:b) + (a:b) = 2\,(a:b) = 2\,a:b$$
$$(a:b) - \tfrac{1}{3}\,(a:b) = \tfrac{2}{3}\,(a:b) = \tfrac{2}{3}\,a:b$$
$$= 2\,a:3\,b$$

„wo man 2 (a : b) eine rationem duplam von
„(a : b) und $\frac{1}{3}$ (a : b) eine subtriplam derselben
„Verhältniß u. s. w. nennen könnte*). Wären
„die Consequenten der Verhältnisse nicht, wie hier,
„einerley (die Antecedenten mögen verschieden seyn
„wie sie wollen) so müßte man sie für die Addi-
„tion und Subtraction, so wie verschiedene Nen-
„ner der Brüche, zuvor dahin bringen, ehe man
„die Operation mit ihnen wirklich vornehmen
„könnte."

So weit Herr M. Hindenburg. Wir kommen nun wieder ins Buch, zu

§. 10.

*) Ratio dupla, tripla und überhaupt multiplex, wird eine Verhältniß für sich, und ohne Beziehung auf eine andere, genannt, in welcher das Vorderglied das Hinterglied zwey, drey oder mehreremale in sich enthält. Dieses rechtfertiget die hier gebrauchte Benennung auch bey solchen Verhältnissen, wo eine gegen die andere, aus welcher sie entstanden ist, gehalten oder mit ihr verglichen wird.

§. 10.

Gehen aber eine Menge Zahlen in lauter zusammenhängenden arithmetischen Verhältnissen fort, so machen sie eine **arithmetische Reihe** oder **Progression.** Dergleichen ist 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; u. s. f. weil $1 - 2 = 2 - 3 = 3 - 4; = 4 -$ u. s. w.

Ausführlicher wird von diesen Reihen in des Herrn Autors Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen §. 80. u. f. gehandelt.. Auch kann hierüber Herrn Eulers Anleitung zur Algebra, 1. Th. 3. Abschn. 3. und 11. Cap. Herrn Karstens Lehrbegriff der Mathematik, 2. Th. IX. Abschn. nachgelesen werden.

§. 11.

Wäre von einer geometrischen Reihe das erste Glied 1 gegeben und das zweyte 2, so findet sich das dritte x, wenn man (nach 10) schließt, daß

$1 : 2 = 2 : x$; und also
$x = 4$;

Hieraus findet sich nun das vierte Glied y dieser Reihe indem man (nach 10) schließt

$1 : 2 = 4 : y$; also
$y = 8$;

Aus gleichem Grunde findet sich das fünfte, $= 16$, das sechste $= 32$ u. s. w.; und man erhält so verfahren, die geometrische Reihe im 10. §. weil von ihr das erste und zweyte Glied gegeben sind.

Ist zum fernern Beyspiel eine andere Zahl 7 als das erste Glied, und 14 als das zweyte, bekannt, so findet sich durch eben das vorige Verfahren die übrigen Glieder die mit 7 und 14 eine geometrische Reihe ausmachen. Nämlich

$$7 : 14 = 14 : x = 28$$
$$7 : 14 = 28 : y = 56$$
$$7 : 14 = 56 : z = 112$$

u. s. w.

Ist statt dem zweyten Gliede der Exponente (V, 26) gegeben, so erhält man dasselbe, wenn das erste Glied mit dem Exponenten multiplicirt wird; (V. 28 und dessen Erl.) da man alsdann, wie vorhin, mittelst der Regel Detri die übrigen Glieder der geometrischen Reihe findet, wozu das gegebene erste gehört. Um die Sache allgemeiner zu machen, so wollen wir das erste Glied zwar 1, aber das zweyte = a setzen; Hierdurch hat man (nach 10)

$1 : a = a : x$; oder $x = a^2$ = dem 3ten Gliede
$1 : a = a^2 : y$; oder $y = a^3$ = dem 4ten Gliede
$1 : a = a^3 : z$; oder $z = a^4$ = dem 5ten Gliede
$1 : a = a^4 : v$; oder $v = a^5$ = dem 6ten Gliede,

Man wird nun leicht schließen, daß das 7te, 8te, 9te und fernere Glied = a^6, a^7, a^8 u. s. w. sey; und die geometrische Reihe wird daher

$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}$ u. s. w. seyn.

Man

Man sieht, daß hier der Exponente jedes Glieds so viel Einheiten enthält, so viel Glieder vor dem Gliede, zu dem er gehört, vorher gehen. Z. B. Bey a^6 ist der Exponent $= 6$, und vor dem Gliede a^6 gehen die sechs Glieder 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, vorher. Sind also in vorherstehender Reihe m Glieder vorhanden, so erhält man das (m + 1)te Glied $= a^m$ das (m + 2)te aber $= a^{m+1}$ das (m + 3)te, $= a^{m+2}$ und so fortgegangen, wird man endlich auf ein Glied kommen, welches das (n — 1)te seyn mag, und $= a^n$ ist. Es kann als das lezte, wenn die Reihe nicht ohne Aufhören, d. i. ins Unendliche fortgehen soll, angesehen werden. Nun sieht man leicht ein, daß obige Reihe allgemein sich so darstellen läßt

$$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 \ldots\ldots a^m, a^{m+1}, a^{m+2} \ldots\ldots a^n$$

Wird nun das erste Glied x, der Exponente e, gesezt, so ist das zweyte Glied xe; also, (wie man leicht durch die Regel Detri finden kann, weil $x : xe = xe : xe^2$ ꝛc.) das dritte xe^2, das vierte xe^3, das fünfte xe^4, das (n — 1)te $= xe^n$, und die geometrische Reihe ist also:

$$x, xe, xe^2, xe^3, \ldots\ldots xe^n$$

§. 12.

Z. E.

7, 14, 28, 56, 112, 224 u. s. w. ist eine geometrische Reihe, weil

 7 : 14

$7 : 14 = 14 : 28 = 28 : 56 = 56 : 112 = 112 : 224$ ꝛc.

Hieraus aber ergiebt sich (nach V, 21)

$\frac{7}{7} : \frac{14}{7} = \frac{14}{7} : \frac{28}{7} = \frac{28}{7} : \frac{56}{7} = \frac{56}{7} : \frac{112}{7} = \frac{112}{7} : \frac{224}{7}$ ꝛc.

d. i.

$1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = 16 : 32$ ꝛc.

daher 1, 2, 4, 8, 16, 32 ꝛc.

eine geometrische Reihe, die in der Verhältniß 1 : 2 welche mit der 7 : 14 einerley ist, fortgehet, d. i. der Exponent der Verhältnisse $7 : 14 = 14 : 28$ ꝛc. ist einerley mit dem Exponenten der Verhältnisse ~~die~~ $1 : 2 = 2 : 4$ ꝛc. die durch die Division der 7 in 14, 28 ꝛc. entstanden sind.

§. 15.

Die geometrische Reihe

$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5$ ꝛc.

giebt

$1 : a = a : a^2 = a^2 : a^3 = a^3 : a^4 = a^4 : a^5$ ꝛc.

Von 1 bis a^5 z. E. sind 5 Verhältnisse nämlich die

$1 : a,\ a : a^2,\ a^2 : a^3,\ a^3 : a^4,\ a^4 : a^5$;

jede dieser Verhältnisse aber $= 1 : a$, und daher ist von 1 bis a^5, 5mal die Verhältniß $1 : a$ vorhanden, d. i. die Verhältniß $1 : a^5$ besteht aus

fünf

fünf Verhältnissen, jede $= 1 : a$ oder $1 : a^5 = 5 (1 : a)$: denn

$$1 : a = 1 : a$$
$$1 : a = a : a^2$$
$$1 : a = a^2 : a^3$$
$$1 : a = a^3 : a^4$$
$$1 : a = a^4 : a^5;$$ Also (nach §. 4)

$$1 : aaaaa = 1 : a^5 = (1 : a) + (a : a^2) + (a^2 : a^3) + (a^3 : a^4) + (a^4 : a^5)$$

$$= (1 : a) + (1 : a) + (1 : a) + (1 : a) + (1 : a)$$
$= 5 (1 : a)$; Oder nach Herrn M. Hindenburgs Bez. $1 : a^5 = (1 : a)(1 : a)(1 : a)(1 : a)(1 : a) = (1 : a)^5$

Eben so beweißt sichs, daß $1 : a^6 = 6 (1 : a)$; oder von 1 bis a^6 sind 6 Verhältnisse, jede so groß wie $1 : a$; $1 : a^7 = 7 (1 : a)$ oder von 1 bis a^7 ist 7mal die Verhältniß $1 : a$; und also überhaupt $1 : a^m = m (1 : a)$; oder von 1 bis a^m sind m Verhältnisse, jede gleich $1 : a$. Nach Hn. Mag. Hindenburgs Bez. $1 : a^m = (1 : a)^m$.

Weil nun also

$$m (1 : a) = 1 : a^m;$$ so ist

$$\frac{m (1 : a)}{m} = \frac{(1 : a^m)}{m} = \frac{1}{m} (1 : a^m)$$

oder $1 : a = \frac{1}{m} (1 : a^m)$

Nach Herrn Mag. Hindenburgs Bezeichnung wäre $1 : a = (1 : a^m)^{\frac{1}{m}}$, und $(1 : a^m)^{\frac{1}{m}} = 1^{\frac{1}{m}} : a^{m\frac{1}{m}} = 1 : a$ wie gehörig.

§. 16.

Die Zahl 64 z. E. in der Reihe bey N im 14. §. steht über die 6 in der Reihe bey L, und diese 6 zeigt an, daß die Verhältniß $1 : 64$ aus 6 Verhältnissen, jede $= 1 : 2$ zusammengesezt ist: denn $64 = 2^6$, und daher $1 : 64 = 1 : 2^6$; aber (nach 15) ist $1 : 2^6 = 6 (1 : 2)$; Also $1 : 64 = 6 (1 : 2)$, d. i. die Verhältniß $1 : 64$ besteht aus 6 solchen Verhältnissen, jede $= 1 : 2$, oder ist daraus zusammengesezt.

Eben das wird auch durch die Bezeichnung des Herrn Mag. Hindenburg ausgedrückt: denn $1 : 64 = (1 : 2)(1 : 2)(1 : 2)(1 : 2)(1 : 2)(1 : 2) = (1 : 2)^6$.

In der Reihe bey N eben dieses 14. §. steht a^m über die Zahl m in der Reihe bey L, und diese m zeigt an, daß die Verhältniß $1 : a^m$ aus m Verhältnissen, jede so groß wie $1 : a$, zusammengesezt sey: denn (nach 15) ist $1 : a^m = m (1 : a)$; (oder auch $1 : a^m = (1 : a)^m$.)

§. 17.

Wenn unter einer geometrischen Reihe, die sich von 1 anfängt (wie die bey N im 14. §.) eine arithmetische Reihe dessen erstes Glied 0 ist (wie die bey

bey L im 14. §.) so untergeschrieben wird, daß das erste Glied 0 der arithmetischen Reihe, unter dem ersten 1 der geometrischen, das 3te, 4te 2c. dieser arithmetischen Reihe unter den andern 3ten, 4ten der geometrischen, zu stehen kommt, so heißt jedes Glied der arithmetischen Reihe der **Logarithme** des über ihn stehenden der geometrischen.

So ist die Zahl 5 in der Reihe bey L (im 14. §.) der Logarithme der über ihr stehenden Zahl 32 in der Reihe bey M, oder auch der Logarithme von a^5 in der Reihe bey N;

Die 0 in L, ist der Logarithme von 1 in N und M; Also ist der Logarithme von 1, = 0.

Die 1 in L, ist der Logarithme von a in N und von 2 in M; a ist aber das zweyte Glied der von 1 anfangenden geometrischen Reihe bey N; also ist der Logarithme des zweyten Glieds einer geometrischen Reihe allemal = 1;

Vergleicht man den 17. §. mit dem 14, so ergiebt sich, daß die Logarithmen, Exponenten der Potenzen, die aus dem zweyten Gliede der von 1 anfangenden geometrischen Reihe entstehen, sind. So ist m in L (§. 14.) der Exponente der Potenz a^m in N, aber auch der Logarithme von a^m.

§. 18.

So bald in der geometrischen Reihe

$$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5 \ldots a^m$$
$$\text{wo } 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots m$$

(nach 17) Logarithmen sind, das zweyte Glied a, dessen Logarithme = 1, bestimmt, ist, so bald ist (nach 11) jedes Glied derselben, und also auch z. B. a^4 als die Zahl, die zum Logarithmen 4 gehört, bestimmt. Dieser Logarithme 4 aber, ist wie bekannt, der Exponente der Potenz a^4, und zeigt daher an, aus wie vielen a, die a^4 besteht. Daher kann man sagen: daß 4 als Logarithme zur Zahl a^4, oder wenn $a = 2$, zur Zahl $16 = 2^4$, gehöre; ob gleich eigentlich das Wort Logarithme, das so viel als ἀριθμὸς λόγων heißen soll, nach seiner Derivation eine Anzahl oder Menge von Verhältnissen andeutet; wie sich leicht nach dem 16. §. verglichen mit den 17ten veroffenbaret. Denn die 5, ist (nach 17) der Logarithme der Zahl a^5 in gleich vorherstehender geometrischen Reihe: aber $1 : a^5 = 5 (1 : a)$;

oder auch: $= (1 : a)^5$ (H)

Also zeigt 5 die Menge der Verhältnisse, (wo jede $= 1 : a$,) aus der $1 : a^5$ besteht, an; daher nennt man in diesem Verstande 5 den Logarithmen der Verhältniß $1 : a^5$; und diese Verhältniß $(1 : a^5)$ ist bestimmt, so bald $1 : a$ bestimmt ist, weil $1 : a^5 = 5 (1 : a)$; oder auch: $= (1 : a)^5$ (H) Man kann daher $1 : a$ als das Maas oder Einheit von $1 : a^5$ ansehen, und dadurch die Größe der Verhältniß $1 : a^5$ bestimmen, weil $1 : a$ mit

$1 : a^5$

$1 : a^5$ verglichen werden kann: Dergleichen Betrachtung läßt sich bey jedem Gliede vorherstehender Reihe oder der bey N im 14. §. anstellen: die hier gegebene ist daher allgemein.

§. 19.

Aus der geometrischen Reihe

$$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 \ldots\ldots a^m$$

wo $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\ldots m$

Logarithmen (§. 17) sind, wird, wenn $a = 2$, die,

$$P\begin{cases} 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots\ldots\ldots 2^m \text{ oder} \\ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \ldots \end{cases}$$

Ist aber $a = 3$ so erhält man die geometrische Reihe,

$$Q\begin{cases} 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4 \ldots\ldots 3^m \text{ oder} \\ 1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots\ldots \end{cases}$$

In der Reihe bey P gehört zum Logarithmen 2, 3, ꝛc. die Zahl 4, 8, ꝛc. in der bey Q aber, die Zahl 9, 27, ꝛc. in der ersten Reihe ist $a = 2$, in der andern $= 3$ gesezt, und bey diesen veränderten a, gehören zu einerley Logarithmen verschiedene Zahlen.

Man sieht hieraus, daß die Zahl a, die das zweyte Glied einer von 1 anfangenden geometrischen Reihe ausmacht, und der ihr Logarithme $= 1$, ist, bestimmt, was zu den Logarithmen für Zahlen gehören. So bestimmte a, in der Reihe bey P, die Zahlen 4, 8, ꝛc. und in der bey Q die 9,

27, ꝛc. die den Logarithmen 2, 3, ꝛc. zukommen. Ist demnach die Zahl (a) fest gesezt, dessen Logarithme = 1 seyn soll, so ist dadurch das ganze Logarithmensystem bestimmt. Die Zahl (a) aber, deren Logarithme = 1 gesezt ist, und auf welcher die Bestimmung des ganzen logarithmischen Systems beruhet, heißt die basis oder das **Fundament** des Systems. So ist

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ....
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ....

ein logarithmisches System, wo die basis = 2 angenommen ist. Und

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 .....
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 .....

ist ebenfalls ein Logarithmensystem, wo die basis = 3 angenommen.

Es giebt also unzählig viele verschiedene logarithmische Systeme, indem es ganz willkührlich ist, welche Zahl die basis des Systems seyn soll.

§. 23.

$1 : a^2 = 2 (1 : a)$ (§. 7.); Aber 2 ist der Logarithme von $1 : a^2$ (§. 18. und dessen Erl.) und zeigt an, daß die Verhältniß $1 : a^2$ die verdoppelte von $1 : a$ sey; $1 : a^3 = 3 (1 : a)$; und 3 der Logarithme der $1 : a^3$, welche dreymal so groß als die $1 : a$ ist

2 ist der Logarithme von a^2 oder vielmehr von $1 : a^2$ (§. 18. und dessen Erl.), $3 . 2 = 6 =$ des

drey-

dreyfachen des Logarithmen von $1 : a^2$; Aber 6 = der Logarithme von a^6 oder von $1 : a^6$; diese Verhältniß nun, ist $= 3\,(1 : a^2)$, und dieser ihr Logarithme also $= 6 = 3 \cdot 2$, welcher daher anzeigt, daß $1 : a^6$ das 3fache der Verhältniß $1 : a^2$ ist.

$\frac{1}{3}\,(1 : a^2) = 1 : a$ (§. 9.); Aber (nach 18. und dessen Erl.) ist $\frac{1}{3}$ der Logarithme von $1 : a$, und deutet an, daß $1 : a$ ein Drittheil der $1 : a^3$ ist.

6 ist der Logarithme von a^6 oder $1 : a^6$; $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2 =$ der Logarithme von $1 : a^2$; aber $1 : a^2$ ist ein Drittheil von $1 : a^6$; und der Logarithme von $1 : a^2$ ist das Drittel des Logarithmen von $1 : a^6$.

Hierbey will ich noch folgendes anmerken:

Aus dem 20, 21 und 22 §. ersiehet man den Nutzen der Logarithmen. Mit großen Zahlen ist mühsam zu multipliciren und zu dividiren; Nicht jede Zahl ist leicht auf eine verlangte Potenz zu erheben, oder aus ihr die Wurzel eines gewissen Grades auszuziehen. Hätte man nun ein gewisses logarithmisches System berechnet, so würden die izt genannten Arbeiten leicht verrichtet werden können: denn statt zwo Zahlen z. E. zu multipliciren oder zu dividiren, braucht man nur ihr Logarithmen zu addiren oder von einander zu subtrahiren rc. Dieses Vortheils wegen sind Logarithmensysteme von verschiedenen Mathematikern im Anfange des vorigen Seculums (nach 29. §.) berechnet worden, wie wir weiter unten sehen werden.

§. 24.

§. 24.

Daß $1 : \frac{1}{a}$ der $1 : a$ entgegengesezt ist, erhellet so:

$$1 : \frac{1}{a} = 1 . a : \frac{1}{a} . a \text{ d. i.}$$

$1 : \frac{1}{a} = a : 1$; Aber (nach 6) ist $a : 1 = -(1 : a)$ folglich der $1 : a$ entgegengesezt.

Eben so ergiebt sich, daß $1 : \frac{1}{a^2} = -(1 : a^2)$; denn $1 : \frac{1}{a^2} = 1 . a^2 : \frac{1}{a^2} . a^2 = a^2 : 1 = -(1 : a^2)$; und nun sieht man leicht, daß $1 : \frac{1}{a^3} = -(1 : a^3)$; $1 : \frac{1}{a^4} = -(1 : a^4)$ u. s. f. sey. Wenn $1 : a^4 = 4 . (1 : a)$; so ist $-(1 : a^4) = -4 (1 : a) = 4 . -(1 : a) = 1 : \frac{1}{a^4}$ (weil $-(1 : a^4) = 1 : \frac{1}{a^4}$); Aber $-(1 : a) = a : 1 = 1 : \frac{1}{a}$; folglich $4 . -(1 : a) = 4 . (1 : \frac{1}{a}) = -4 . (1 : a) = 1 : \frac{1}{a^4}$; Folglich findet sich in der Reihe bey N im 24sten §. von 1 bis

bis $\frac{1}{a^4}$ die Verhältniß 1 : a viermal negativ, wenn sie von 1 bis a^4 in der Reihe bey N des 14. §. viermal positiv enthalten ist. Also ist die Summe dieser Verhältnisse in der Reihe N im 24. §. negativ, wenn sie in der Reihe N im 14 §. positiv ist.

§. 25.

Die Regel der Division . . . . . Logarithmen.

Dies geschiehet in den Fällen, wo des Divisors Logarithme, größer ist als der des Dividendi. Z. E. $a^4 : a^6 = a^{-2}$.

§. 28.

Wenn man . . . . wären.

Aus dem 26. §. ist klar, daß der mittleren Proportionalzahl q, die zwischen p und a^{m+1}, d. i. [weil (nach 26) $p = a^{\frac{2m+1}{2}}$] zwischen $a^{\frac{2m+1}{2}}$ und a^{m+1} fällt ihr Logarithme die mittlere arithmetische Proportionalzahl ist, die zwischen dem Logarithmen $\frac{2m+1}{2}$ der Zahl $p = a^{\frac{2m+1}{2}}$ und dem Logarithmen m + 1 der Zahl a^{m+1}, fält. Aber die mittlere arithmetische Proportionalzahl ist (nach V, 12)

$$= \frac{\left(\frac{2m+1}{2}\right) + (m+1)}{2} = \left(\frac{2m+1}{2} + m + 1\right)$$

$$+1)\cdot\tfrac{1}{2}=\left(\frac{2m+1}{2}+\frac{2m}{2}+\frac{2\cdot 1}{2}\right)\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{2m+1+2m+2}{2}\right)\cdot\tfrac{1}{2}=\left(\frac{4m+3}{2}\right)$$

$$\cdot\tfrac{1}{2}=\frac{4m+3}{4}=\frac{4m}{4}+\tfrac{3}{4}=m+\tfrac{3}{4}.$$

Theilt man nun die Verhältniß zwischen den beyden nächsten Gliedern a^m und a^{m+1} der Reihe bey N im 14. §. in vier Theile ein, so werden von 1 bis q allerdings $m+\frac{3}{4}$ Verhältnisse, d. i. $m+\frac{3}{4}$ mal die Verhältniß $1:a$ enthalten, seyn. Denn von 1 bis a^m sind m Verhältnisse jedes $=1:a$, und von a^m bis q, drey Viertel dieser Verhältniß.

Nach des V. Cap. 32. §. findet sich $q=\surd\left(a^{\frac{2m+1}{2}}\times a^{m+1}\right)=\surd\left(a^{\frac{2m+1}{2}+m+1}\right)$ (II. 7)

$$=\surd\left(a^{\frac{2m+1+2m+2}{2}}\right)=\surd\left(a^{\frac{4m+3}{2}}\right)=\left(a^{\frac{4m+3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(II. 9) $=a^{\frac{4m+3}{4}}=a^{m+\frac{3}{4}}$; aber (nach 17) ist $m+\frac{3}{4}$ der Logarithme von $a^{m+\frac{3}{4}}$, also auch von q, wie schon gefunden worden.

§. 29. 30 und 31.

Man setze die basis eines gewissen Logarithmen-systems = 10; so wird dieses System folgendes:

1,	10,	100,	1000,	10000	......
0,	1,	2,	3,	4,	.....

seyn.

seyn. Hier weiß man, daß von 1, 10, 100 ꝛc. die Logarithmen 0, 1, 2, ꝛc. sind. Aber zwischen 1 und 10, 10 und 100 u. s. w. fallen noch viele Zahlen deren Logarithmen man nicht weiß, die aber, (nach 17 und 26) Potenzen der 10 sind, die zu ihrem Exponenten Brüche haben, weil 10, 100, 1000 ꝛc. die Exponenten 1, 2, 3 ꝛc. zu kommen, und zwischen 1 und 2, und 3 sich keine ganzen Zahlen befinden.

Will man nun die fehlenden Logarithmen, z. E. den Logarithmen von 5 berechnen, so muß man erstlich (nach 28) zwischen 1 und 10 die mittlere geometrische Proportionalzahl, welche = 3, 162277 ꝛc. = p, (nämlich das p im 28. §. wenn dort a^m = 1; und a^{m+1} = 10, gesezt wird) und zwischen 0 und 1 (als den Logarithmen von 1 und 10) eine mittlere arithmetische Proportionalzahl, die = $\frac{1}{2}$ = 0, 5, suchen. Nun fällt die 5 zwischen 3, 162277 und 10; daher muß man zwischen diesen beyden Zahlen eine mittlere geometrische Proportionalzahl q = 5, 623413, und zwischen 0, 5 und 1 (als den Logarithmen von p und 10) eine mittlere arithmetische, die = 0, 75 ist, berechnen Da aber die 5 zwischen p und q fällt, so ist zwischen diesen beyden Zahlen eine mittlere geometrische Proportionalzahl f = 4, 216964 und zwischen 0, 5, und 0, 75 eine arithmetische = 625, zu suchen. Weil izt 5 zwischen f und q fällt, so berechnet man nun eine mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen ihnen, und eine arithmetische

sche zwischen ihren Logarithmen. (die 0, 5 und 0, 625 waren) Auf diese Art fährt man immer mit Berechnung mittlerer geometrischer und arithmetischer Proportionalzahlen fort, bis man endlich eine geometrische erhält, die entweder genau = 5, oder wenigstens der 5 so nahe kommt, daß der Unterschied für Nichts zu achten ist; da dann die zu dieser mittleren geometrischen Proportionalzahl gefundene arithmetische, der Logarithme von 5 seyn wird (§. 26.). Die ganze Berechnung dieses Logarithmen aber, läßt sich folgendermaßen darstellen:

Zwischen

Zwischen 1 und	√10	ist die mittl. geom. Propz.	u. die arith. od. Log.
		3,162277	0,5
3,162277 u.	10	5,623413	0,75
3,162277 u.	5,623413	4,216964	0,725
4,216964 u.	5,623413	4,869674	0,6875
4,869674 u.	5,623413	5,236991	0,71875
4,869674 u.	5,236991	5,048065	0,703125
4,869674 u.	5,048065	4,958069	0,6953125
4,958069 u.	5,048065	5,002865	0,6992187
4,958069 u.	5,002865	4,980416	0,6972656
4,980416 u.	5,002865	4,991627	0,6982421
4,991627 u.	5,002865	4,997242	0,6987304
4,997242 u.	5,002865	5,000052	0,6989745
4,997242 u.	5,000052	4,998647	0,6988525
4,998647 u.	5,000052	4,999350	0,6989135
4,999350 u.	5,000052	4,999701	0,6989440
4,999701 u.	5,000052	4,999876	0,6989592
4,999876 u.	5,000052	4,999963	0,6989668
4,999962 u.	5,000052	5,000008	0,6989707
5,000008 u.	5,000052	4,999984	0,6989687
4,999984 u.	5,000008	4,999997	0,6989697
4,999997 u.	5,000008	5,000003	0,6989702
4,999997 u.	5,000003	5,000000	0,6989700

Nach dieser Berechnung also zeigt sich, daß man 0,6989700 für den Logarithmen von 5 annehmen kann. Denn die durch vorstehende Rechnung zwischen 4,999997 und 5,000003 gefundene mittlere geometrische Proportionalzahl ist von der 5 nicht mehr um $\frac{1}{1000000}$ unterschieden. Auf diese mühsame Art, hat Heinrich Brigg, der Geometrie Professor zu Oxfort, die Logarithmen für die basis = 10 berechnen müssen, die man izt unter den Namen der Briggischen Logarithmen braucht. Wären zu Briggs Zeiten die Hülfsmittel bekannt gewesen, die man hernach gefunden hat, und nur in der höhern Mathematik erklärt werden können, so hätte Briggs freylich keine solche mühsame Berechnung anstellen dürfen: Inzwischen aber konnte man sich doch diese Rechnung einigermaßen erleichtern, indem man nur die Logarithmen der Primzahlen zu suchen nöthig hatte, um daraus die Logarithmen der zusammengesezten Zahlen, durch bloßes Addiren zu finden. Da der Logarithme von 5, = 0,6989700 so läßt sich daraus der Logarithme von 2, einer Primzahl, schon durch blosses Subtrahiren finden. Denn $\frac{10}{5} = 2$,; Also

$$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - - \log 5 \ (\S.\ 20) =$$

$$1,0000000 - 0,6989700 = 0,3010300;$$

Hieraus nun ergiebt sich leicht der Logarithme von 4, 8, 16, 32; Denn $4 = 2^2$.; Also log 4

$= 2 \log 2 = 2 \times 0,3010300 = 0,6020600$; $8 = 2^3$.; Also $\log 8 = 3 . \log 2 = 3 \times 0,3010300 = 0,9030900$; $16 = 2^4$; Also $\log 16 = 4 \log 2 = 4 \times 0,3010300 = 1,2041200$; u. s. w. Ist log 3 nach obiger Art $= 0,4771212$ gefunden worden, so finden sich durch ihm die Logarithmen von 9, 25 ꝛc. leichte; Denn $9 = 3^2$; Also $\log 9 = 2 \log 3 = 0,9542424$; u. s. f. Da man die Logarithmen von 5 und 3 weiß, so läßt sich auch leicht der Logarithme von 15, 45 ꝛc. finden: denn $15 = 3 . 5$; Also $\log. 15 = \log 3 + \log 5 = 0,4771212 + 0,6989700 = 1,1760913$; u. s. f.

§. 32.

Es sey $L = 0,9030900$; so ist $N = 8$, die zu diesem Logarithmen gehörige Zahl; da nun also $\log N = \log 8 = 0,9030900$; so ist $\log (N . 10) = \log (8 . 10) = \log 80 = \log N + \log 10 = \log 8 + \log 10 = 0,9030900 + 1 = 1,9030900$; Aus eben dieser Ursache ist z. E. $\log (8 . 100) = \log 800 = \log 8 + \log 100 = 2,9030900$; u. s. w.

§. 33.

Es sey der Logarithme 1,2039451 bekannt; man schlage ihn in den gemeinen und bekannten Logarithmentafeln auf; so wird man finden, daß er zwischen den Logarithmen 1,1760913 der Zahl 15 (die das P im Buche ist) und dem Logarithmen 1,2041200, der zur Zahl 16 (die das P + 1 im Buche ist) gehört, fällt. Also muß der

Logarithme 1, 2039451, zu einer Zahl, die N heißen mag, und welche zwischen 15 und 16 fallen muß, gehören. Der Logarithme von 10 × 15 ist (nach 32) = 2, 1760913; der von 10 . 16, = 2, 2041200; und der von 10 . N = 2, 2039451; da nun dieser Logarithme der Zahl 10 . N zwischen dem Logarithmen 2, 1760913, und dem 2, 2041200, fällt; so muß 10 N zwischen 150 und 160 fallen. Daher kann N = 151, 152, 153, 154, 155, 156, 158, 159, seyn. Um nun genauer zu bestimmen, zwischen was für Größen 10 N eigentlich falle, so suche man in den Tafeln den Logarithmen für 159, welcher 2, 2013971 seyn wird. Zwischen diesem und dem Logarithmen von 160 fällt der Logarithme 2, 2039451; Also muß 10 N zwischen 159 und 160 fallen.

Mithin ist 10 N > 159 oder

N > 15, 9 und 10 N < 160 oder

N < 16, 0; Folglich muß N zwischen 15, 9 und 16 fallen.

Vermehrt man ferner die Kennziffern des Logarithmen 2, 2041200 der Zahl 160, um 1, und thut eben dies auch bey den von 10 N oder bey 2, 2039451; so erhält man erstlich 3, 2041200 als den Logarithmen von 1600, und 3, 2039451, als den von 100 N. Sucht man in den Tafeln der Zahl 1599 ihren Logarithmen, so findet man ihn 3, 2038485; Man sieht, daß 3, 2039451, zwischen 3, 2038485 und 2, 2041200,

2041200, und also 100 N zwischen 599 und 1600, fällt; Also ist

$$100\,N > 1599;\ \text{d. i.}$$
$$N > 15{,}99;\ \text{und}$$
$$100\,N < 1600,\ \text{d. i.}$$
$$N < 16{,}00$$

d. h. N fällt zwischen 15, 99 und 16.

Wenn man den Logarithmen einer Zahl andeuten will, so sezt man gewöhnlich vor ihr l, oder log. so daß z. E. l 34 = Logarithme von 34.

§. 37.

Folgende aus unsers Herrn Autors Astronomische Abh. II. Samml. V. Abh. und Herrn Prof. Scheibels Einleit. zur mathematischen Bücherkenntniß, 7. Stück genommene kurze Nachricht der Neperischen und Briggischen Logarithmen, wird zur Erläuterung dieses §. dienen.

Die erste Gelegenheit zu den Logarithmen hat ohne Zweifel den Mathematikern die Vergleichung einer geometrischen Reihe mit einer arithmetischen gegeben. Lange vor den Zeiten Nepers, eines Schottländischen Barons, haben deutsche Mathematikverständige, und besonders solche, deren Lieblingsstudium die Arithmetik war, dergleichen Vergleichung angestellt; nur fanden diese damals blos einen angenehmen Zeitvertreib darinne. So haben schon Jordanus Nemorarius und Simon Jakob von Coburg, — wovon jener, so viel

man weiß, im 13. Säculo, dieser aber in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts lebte — arithmetische Reihen mit geometrischen verglichen; und **Michael Stiefel**, ein Prediger zu Königsberg in Preußen ist in seiner Arithmetica integra, die mit **Melanchthons** Vorrede 1544 zu Nürnberg in 4. herausgekommen, schon ziemlich nahe bey den Logarithmen gewesen. In des ersten Buchs 4ten Capitel, (welches von geometrischen Progressionen handelt) findet sich eine geometrische Reihe mit einer arithmetischen so verbunden:

0	1	2	3	4	5	6
1	2	4	8	16	32	64

wobey erinnert wird, was bey der geometrischen Progression 1 ist, sey bey der arithmetischen 0. In eben diesem Capitel steht auch: vtilis quaedam tractatio, vt progressioni Arithmeticae respondeat Geometrica progressio. Die angeführten Nutzen sind die Uebereinstimmung der Addition, Subtraction, das Verdoppeln ꝛc. in der arithmetischen Progression, mit der Multiplication, Division, dem Quadriren ꝛc. in der geometrischen Reihe. Aus des 3ten Buchs 5 Capitel sieht man noch deutlicher was Stiefel von den Logarithmen gewußt hat. Nachdem er daselbst eine arithmetische und geometrische Progression so zusammen geordnet,

—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	2	4	8	16	32	64

sagt

sagt er: Posset hic fere nouus liber scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet vt me hic subducā et clausis oculis abeā. Repetam vero vnum ex superioribus, ne frustra dicar fuisse in campo isto. Sed sententia inuersa repetam quod mihi repetendum videtur. Qualiacunque facit progressio Geometrica multiplicādo et diuidendo, talia facit progressio Arithmetica addendo et subtrahendo. D. i. Man könnte hier von diesen wunderbaren Zahlen fast ein neues Buch schreiben; aber ich muß mich der Sache entschlagen und sie mit den Rücken ansehen. Doch will ich etwas aus dem vorhergehenden wiederholen, damit nicht von mir gesagt werde, daß ich mich vergebens bey dieser Sache aufgehalten habe. Was ich zu wiederholen nöthig finde, werde ich etwas verändert hersetzen: Wenn man bey einer geometrischen Progression multipliciren und dividiren muß, braucht man bey einer arithmetischen nur zu addiren und subtrahiren. Noch näher war Stiefel bey den Logarithmen: Er beschreibt seine wunderbaren Zahlen (die Logarithmen) als Exponenten der Potenzen der zugehörigen Zahlen (Schw. Abh. 14 B. S. 6.); und hiebey blieb er stehen. Nach ihm hat vor dem 17. Jahrh. nur Just Byrgius aus der Schweiz, ein berühmter Mechanicus an dem Heßischen Hofe, einige Kenntniß von den Logarithmen gehabt; und dazu sollen ihm, wie Keppler berichtet, die Apices der alten Logistik (nämlich die Zeichen

'; ";... der Minuten, Secunden, ꝛc.) den Weg gezeigt haben.

Man sieht hieraus, wie sehr nahe deutsche Mathematiker den Logarithmen gewesen sind; und doch ist der Wunsch einer Erleichterung und Abkürzung des beschwerlichen Multipliciren und Dividiren, den viele, besonders Astronomen, ermüdet von dergleichen Rechnungen, thaten, nicht eher erfüllet worden, als bis zu Anfange des 17ten Jahrhunderts **Neper** auf eine gewisse Art von **Logarithmen** fiel, die von den die wir uns izt bedienen, verschieden sind. — Von der Natur der Neperschen Logarithmen lese man Herrn Hofr. Karstens Lehrbegrif der gesammt. Math. 2 Th. 146 und 147. §.; Herrn D. Gehlers Disput. Hist. Log. nat. primordia §. V; und Schw. Abh. 14 B. 8, 9, 10 S. — Neper berechnete sein **Logarithmensystem** oder **Canon**, blos zum trigonometrischen Gebrauche, und gab ihn 1614 zu Edimburg unter dem Titel: Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio, heraus, von dem ein Jahr nach dessen Tode, der 1618 erfolgte, sein Sohn die zweyte Auflage mit einem Anhange von **Briggs**, Professor der Geometrie zu Oxfort, besorgte.

Kaum hatte **Neper** sein Buch herausgegeben, so nahmen einige berühmte deutsche Mathematiker diese Erfindung mit dem größten Beyfall auf. Unter diesen war **Benjamin Ursinus**, Professor der Mathematik zu Frankfurth an der Oder, der

Erste

Erste der Nepers Logarithmen den Deutschen bekannt machte; indem er von **Georg Vechner**, Doctor der Gottesgelahrheit, Hofprediger und Superintendent zu Brig, Nepers Canon zuerst erhielte, und selbigen seinem Cursu mathematico practico (Cöln 1618; 8v.) beyfügte. Er selbst aber, lehrte hierauf in seiner 1624 in 4. herausgegebenen Trigonometria die Berechnung der Neperischen Logarithmen. In diesem Buche nun findet man einen Canon solcher Logarithmen von 10 zu 10 Secunden berechnet — Außer diesen haben sich noch einige andere mit dem Neperischen Logarithmen beschäftiget, von deren Arbeit man in den angeführten Schriften, unsers Herrn Autors, Herrn Prof. Scheibels und Herrn D. Gehlers hinlängliche Nachricht findet.

Da die Neperischen Logarithmen eben nicht die besten sind; so dachte **Heinrich Briggs** auf brauchbarere, und fand daß es weit besser wäre, wenn in einem mehr nach dem Decimalgesetze eingerichten System log 1 = 0 und log 10 = 1 gesezt würde. Dies machte er 1616 Nepern bekannt, der ihm seinen völligen Beyfall gab, und ihm gestand, daß er schon längst darauf gedacht hätte; allein Krankheit und andere häufige Geschäfte hinderten ihn dergleichen selbst vorzunehmen.

Briggs berechnete hierauf das erste 1000 Logarithmen, und gab es noch im Jahr 1616 heraus. **Eduard Wright** übersezte es ins Englische, und wollte selbiges, nachdem er es **Nepern**

zur Prüfung überschickt hatte, drucken lassen; starb aber darüber; und sein Sohn gab es, noch 1616 zu London mit einer gelehrten Vorrede von Briggs, heraus. Eine weitere Berechnung solcher Logarithmen machte **Briggs** 1629 in seiner Arithmetica logarithmica, bekannt. Diese enthält die Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 20000, dann von 90000 bis 100000, und für die 101 Chiliade, nebst einer weitläuftigen Einleitung, worinne er unter andern meldet, daß er die Lücken ausfüllen wollte, so bald er seine durch anhaltende Anstrengung des Geistes und stetes Wachen geschwächte Kräfte würde gestärkt haben. Es fand sich aber bald ein fleißiger Holländer, **Adrian Vlacq** in Goude, der nach Briggs Vorschriften gedachte Lücken ausfüllte. Er that dies in seiner Arithmetica logarithmica (Goude 1628); in welcher sich zwar die Logarithmen der ersten 100000 Zahlen finden, deren Mantissen aber 4 Decimalstellen weniger haben, als die des Briggs.

Dieser dachte auch die Logarithmen für die sphärische Trigonometrie brauchbar zu machen: Allein die schnelle Abnahme seiner Kräfte, unterbrachen diese Arbeit; doch trug er sie kurz vor seinem Tode, — der zu Anfange des Jahrs 1630 erfolgte — seinem vertrautesten Freunde, **Heinrich Gellibrand**, der Astronomie Prof. in Gresham College, auf. Dieser vollendete selbige mit Hülfe **Vlacqs**, und machte sie in dem Werke: Trigonometria Britannica: siue de doctrina triangulorum

angulorum libri duo, (Goude 1633, fol.) bekannt. Das erste Buch ist von **Briggs**, das andere hingegen von **Gellibrand**. **Vlacq** selbst gab noch in diesem Jahre seine Trigonometriam artificialem: siue magnum canonem triangulorum logarithmicorum, in fol. heraus, worinne die Briggischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 vorkommen.

Nach der Zeit wurden verschiedene kleinere Ausgaben der Briggischen Logarithmentafeln besorgt, welche nur die Logarithmen der Zahlen 1 bis 10000 enthalten. Dahin gehört die von Vlacq selbst, welche unter dem Titel: Tabulae Sinuum, Tangentium, et Logarithmorum .... bekannt genug ist. Sie sind verschiedene Male aufgelegt worden, und es ist ihnen gemeiniglich eine kurze Einleitung vorgesezt. Ferner eine Auflage des Freyherrn von **Wolf**. Er besorgte sie 1711 zu Halle; und man hat von ihr ebenfalls einige spätere Ausgaben.

Zu den **vollständigsten** Logarithmentafeln gehören die von **Sherwin** und **Gardiner**. Sie kamen 1742 zu London heraus, einmal unter dem Titel: Sherwins Mathematical Tables, contrived after a most comprehensive method etc. by William Gardiner; — Sie enthalten für alle Zahlen von 1 bis 101000 die briggischen Logarithmen. (Karstens Lehrb. der Math. 2 Th. 151, 148 und f. §. d. A. N.) — das anderemal: Tables of Logarithmes for all Numbers from 1 to

102100

102100 u. s. w. in klein Folio. In beyden ist die Kennziffer der Logarithmen weggelassen, weil man sie ohnedem schon weiß. Ohngeachtet der zwofachen Ausgabe sind diese Tafeln ungemein selten. Daher hat 1770 so wohl P. Pezenas zu Avignon, als Clark zu London, eine neue Auflage besorgt. —

Endlich sind vor kurzem, (im Jahr 1778,) J. K. Schulzens neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer, mechanischer und anderer zum Gebrauche der Mathematik unentbehrlichen Tafeln, nebst Anweisung zu deren Gebrauche, Berlin gr. 8v. in 2 Bänden, erschienen. Der erste Band dieser vortreflichen Ausgabe mathematischer Tafeln, enthält blos Logarithmen. Die Briggischen der Zahlen 1 bis 101000 bis auf 7 Decimalstellen berechnet, sind nach dem Sherwin auf den ersten 187 Seiten, nebst den Unterschieden und Proportionaltheilen, abgedruckt. Zwo Seiten derselben, fassen wie beym Sherwin 1000 Logarithmen, und die Kennziffer ist gleichfalls weggelassen worden. — Mehreres von ihrer Einrichtung findet man in der vorgesezten kurzen Einleitung. — Der zweyte Band enthält die trigonometrischen und andere Tafeln. —

Noch

Noch einige Aufgaben der Logarithmen.

I.

Wenn man die Differenzen der Logarithmen nebst den Unterschieden der diesen Logarithmen zukommenden Zahlen untersuchet, so wird man finden, daß diese beynahe in geometrische Proportion stehen. Hierdurch wird man in den Stand gesezt den Logarithmen einer Zahl der nicht in den gemeinen Tafeln steht, ziemlich richtig, wenigstens zu vielen Gebrauch genau genug, zu finden. Um das erste zu zeigen, so ist z. E. der Zahl 9991 ihr Logarithme, 3, 9996090 der Zahl 9993 ihrer 3, 9996959 und der Zahl 9995 ihrer 3, 9997828; Der ersten beyden Zahlen Unterschied ist 9993 — 9991 = 2, und der ersten und dritten ihrer ist 9995 — 9991 = 4; der Unterschied der ersten beyden Logarithmen aber ist 3,9996959 — 3, 9996090 = 869; und der, des ersten und dritten Logarithmen ist 3,9997828 — 3,9996090 = 1738; Aber 2 : 4 = 869 : 1738; denn 2 × 1738 = 3476; und 4 × 869 ist auch = 3476.

Ferner: log 5211 = 3, 7169211; log 5215 = 3, 7172543; log 5220 = 3, 7176705; Aber 5215 — 5211 = 4; 5220 — 5211 = 9; 3, 7172543 — 3, 7169211 = 3332 und 3, 7176705 — 3, 7169211 = 7494; daher 4 : 9 = 3332 : 7494 beynahe; weil 4 × 7494 = 29976 und 9 × 3332 = 29988; Beyde Producte aber beynahe einander gleich, und nur um

$\frac{12}{100000000}$ unterschieden sind. Weiter: log 771 = 2, 8870544; log 774 = 2, 8887410; log 780 = 2, 8920946; und 774 — 771 = 3; 780 — 771 = 9; 2, 8887410 — 2, 8870544 = 16866; 2, 8920946 — 2, 8870544 = 50402; und daher beynahe 3 : 9 = 16866 : 50402; Denn 3 × 50402 = 151206 ist von 9 × 16866 = 151794 nur um $\frac{588}{100000000}$ unterschieden. Man sieht hieraus, das je kleiner die Zahlen sind, desto mehr die Verhältnisse der Unterschiede dieser Zahlen, von den Verhältnissen der Unterschiede der ihn zukommenden Logarithmen, differiren.

II.

Den Logarithmen einer Zahl, der grösser ist, als jeder der Logarithmen in den gewöhnlichen Tafeln zu finden.

Der Deutlichkeit wegen wollen wir das Verfahren zugleich durch ein Exempel zeigen. Es sey daher 573126 die Zahl, von der man den Logarithmen verlangt. Weil nun in den gemeinen Tafeln die Logarithmen aller ganzen Zahlen die aus vier Ziffern bestehn, vorhanden sind, so sondere man sich von der gegebenen Zahl (573126) von der Linken nach rechter Hand vier Ziffern ab. Nach unserm Exempel wären sie 5731. Hierauf suche man

man in den gewöhnlichen Tafeln, so wohl den Logarithmen von 5731, als auch der Zahl, die aus den 4 abgesonderten Ziffern besteht, und der Zahl die um 1 größer ist, nämlich nach unserm Exempel von 5732. Der Logarithme von 5731 ist 3, 7582304, und der von 5732 ist 3, 7583062. So viel Ziffern nun diesen Zahlen, in Ansehung der gegebenen, mangeln, eben so viel Nullen setze man rechter Hand an sie. Hier im Exempel finden sich an der gegebenen Zahl zwo Ziffern mehr, und daher verwandle man 5731 in 573100 und 5732 in 573200. Wenn man nun 2, zur Kennziffer, sowohl des Logarithmen 5731, als des von 5732, addirt, so kommt (nach 32) der Logarithme erstlich von 573100 und dann von 573200. Also ist log 573100 = 5, 7582304; und log 573200 = 5, 7583062. Da sich nun die Unterschiede der Zahlen, beynahe wie die Differenzen ihrer Logarithmen verhalten, und 573126 — 573100 = 26; 573200 — 573100 = 100; 5, 7583062 — 5, 7582304 = log 573100 — log 573200 = 758; log 573126 — log 573100 aber, = x seyn mag, so ist

$$100 : 26 = 758 : x$$

daher

$$x = 197\frac{8}{100} = 197,08$$

Weil nun die Logarithmen in den gewöhnlichen Tafeln auf 7 Decimalstellen oder, welches einerley ist,

ist, bis auf 10 Milliontheile gerechnet sind, so ist x in 10 Milliontheilen gefunden worden; und wenn man die Logarithmen nur auf 7 Decimalstellen sucht, so braucht man nur $x = 197$ zu setzen, und daher 0, 08 weg zu lassen. Da aber $x = \log 573126 - \log 573100$; so ist $\log 573226 = \log 573100 + x$; Weil nun $\log 573100 = 5,7582304$, und $x = \frac{197}{100000000} = 0,0000197$; so ist $\log 573126 = 5,7582304 + 0,0000197 = 5,7582501$.

Wenn die vorgegebene Zahl keine Primzahl ist, sondern eine zusammengesezte, d. i. eine solche, die sich in Factoren zerlegen läßt; so läßt sich ihr Logarithme sogleich durch Addition der Logarithmen ihrer Factoren finden (20). So ist z. B. $6081075 = 3003 \times 2025$; und also $\log 6081075 = \log 3003 + \log 2025 = 6,7839803$. (Ein solcher Fall ist schon im Buche im Exempel, auf der 153 S. vorgekommen, und da eben so verfahren worden.) Hier lassen sich oft die bey der Lehre der Aufhebung der Brüche gegebenen Kennzeichen der Theilung einer Zahl durch eine andere ohne Rest, sehr gut gebrauchen.

Um noch ein Exempel den vorhergehenden beyzufügen, so sey für 102,97 der Logarithme zu suchen. Die Kennziffer des für 102,97 zu suchenden Logarithmens muß 2, seyn, weil 102, eine ganze Zahl ist und aus drey Ziffern besteht, nach

§. 31.

§. 31. aber jede ganze Zahl aus einer Ziffer mehr besteht als die Kennziffer ihres Logarithmen, Einheiten enthält. Die Kennziffer des zu suchenden Logarithmen ist also bekannt, daher braucht man unter währender Rechnung nicht an sie zu gedenken, und deswegen thun, als wenn für 10297 der Logarithme zu suchen wäre. Da aber

$$10297 = 1471 \times 7; \text{ so ist}$$
$$\log 10297 = 1471 + \log 7 =$$
$$3,1676127 + 0,8450980 =$$
$$4,0127107; \text{ folglich}$$

$\log 102,97 = 2,0127107.$: denn

$$\log 102,97 =$$
$$\log\left(\frac{10297}{100}\right) =$$
$$\log 10297 - \log 100 =$$
$$4,0127107 - 2 =$$
$$2,0127107.$$

Wäre 10297 eine Primzahl, so hätte man nach dem ersten Verfahren den Logarithmen suchen müssen.

III.

Die Zahl zu finden, die einem gegebenen Logarithmen zugehört, der größer ist, als alle, die in den gewöhnlichen Tafeln vorkommen.

Da in den gewöhnlichen Tafeln die Logarithmen nur bis auf 7 Decimalstellen berechnet sind,

so kann die Kennziffer des gegebenen Logarithmen nicht über 6, seyn.

Man suche die Mantisse des gegebenen Logarithmen unter der Kennziffer 3 in den Tafeln auf. Findet man nun sie genau, so nehme man die dabey stehende Zahl und hänge an ihn rechter Hand 3 Nullen, wenn die Kennziffer des gegebenen Logarithmen 6 ist, zwey Nullen, wenn sie 5 ist, eine Null, wenn sie 4 ist. Es sey 6,9606610 der gegebene Logarithme, wo 6 die Kennziffer und die Ziffern 9606610 die Mantisse ausmachen. Diese findet sich unter der Kennziffer 3 bey der Zahl 9134; hängt man ihr rechter Hand 3 Nullen, so ergiebt sich die Zahl 9134000 die dem gegebenen Logarithmen zugehört: denn 9134000 = 9134 . 1000. Also log 9134000 = log 9134 + log 1000. Aber log 9134 = 3,9606610 wie man in den gewöhnlichen Tafeln findet, und log 1000 = 3; folglich log 9134000 = 3,9606610 + 3 = 6, 9606610, wie gehörig.

Findet man aber die Mantisse des gegebenen Logarithmen nicht genau in den Tafeln unter der Kennziffer 3, so muß sie zwischen ein paar zunächst folgende dieser Kennziffer fallen, die als die Grenzen von ihr anzusehen sind. Es sey daher 6,9473621 der gegebene Logarithme. Die Mantisse von ihm findet sich nicht genau in den Tafeln, aber man findet, daß, wenn man sie unter der Kennziffer 3 in den Tafeln aufsucht, sie zwischen 9473357 und 9473847 fällt, und daß bey der

der ersten die Zahl 8858 bey der zweyten aber die Zahl 8859, steht, und folglich 3,9473357 der Logarithme von 8858 und 3,9473847 der Logarithme von 8859 ist. Macht man nun die Kennziffer von jedem dieser beyden Logarithmen der Kennziffer des gegebenen gleich; macht man nämlich 6,9473357 aus 3,9473357 und 6,9473847 aus 3,9473847: so muß der gegebene Logarithme 6,9473621 zwischen die Logarithmen 6,9473357 und 6 9473857 fallen; Zu 6,9473357 gehört die Zahl 8858000 und zu 6,9473847 die Zahl 8859000; (§. 32.) daher fält die zu suchende Zahl, so z heißen mag, zwischen 8858000 und 8859000. Da sich aber die Unterschiede der Zahlen beynahe wie die Differenzen ihrer Logarithmen verhalten (§. I.); so muß $6{,}9473847 - 6{,}9473358 : 6{,}9473621 - 6{,}9473357 = 8859000 - 8858000 : z - 8858000$

d. i. $490 : 264 = 1000 : x$ (wenn $z - 8858000 = x$ gesezt wird.)

Also $x = \frac{264 \cdot 1000}{490} = \frac{26400}{49} = 538 \frac{38}{49} = 538{,}7754 \ldots$

Da aber, wie vorausgesezt, $x = z - 8858000$; so ist $z =$

$8858000 + x$; folglich

 $= 8858000$

= 8858000 + 538,7754 . . . = 8858538,7754 . . . .

IV.

Im vorigen §. lernten wir die Zahl eines Logarithmen finden, der größer als jeder in den Tafeln ist, und daher sich nicht darinne findet. In Ansehung der gemeinen Tafeln ist eines solchen Logarithmen Kennziffer > 3; Nun können aber Logarithmen vorkommen, die zwar ihren Kennziffern nach in den Tafeln stehen, aber nicht in Ansehung ihrer Mantissen. Um nun die Zahl für einen solchen Logarithmen zu finden, (wenn man nicht mit dem, in den Tafeln der ihn am nächsten kommt zufrieden seyn will,) verfährt man so:

Der Deutlichkeit wegen, sey der gegebene Logarithme 3,5762437. Man nehme aus den Tafeln die Logarithmen, zwischen welche der gegebene fällt, und auch die Zahlen die zu den genommenen Tafellogarithmen gehören. In unserm Exempel ist:

$$3,5762261 = \log 3769$$
$$3,5763413 = \log 3770$$

und es ist offenbar, daß die gesuchte Zahl zwischen 3769 und 3770 fallen muß; da aber diese beyden Zahlen nur um 1 unterschieden sind, so muß die zu suchende aus 3769 und einem Bruche bestehen. Dieser Bruch also muß gesucht werden. Er sey x. Nach dem I. §. haben wir

$3,5763413 - 3,5762261 : 3,5762437 - 3,5762261$

$= 3769 - 3770 : 3769 + x - 3769$

das ist

$$1152 : 176 = 1 : x$$

Also $x = \frac{176}{1152} = \frac{22}{144} = \frac{11}{72}$

oder in Decimaltheilen

$$= 0,152777 \ldots.$$

Mithin ist $3769 \frac{11}{72} = 3769,152777 \ldots.$ die Zahl, zu der unser gegebene Logarithme 3,5762437 gehört.

V.

Zu einem negativen Logarithmen den dazu gehörigen Decimalbruch zu finden.

Da der Nenner eines solchen Bruches eine 1 mit so viel Nullen als man will, seyn kann; so setze man ihn 100000; und — 1,2708352 sey der gegebene Logarithme. Man hat nun also den Zähler dieses Decimalbruchs zu suchen; Er sey einstweiln $= x$; so ist $\frac{x}{100000}$ der Bruch, der zu dem gegebenen Logarithmen gehört; und daher

$$\log\left(\frac{x}{100000}\right) = -1,2708352.$$

Aber

$$\frac{x}{100000} \times 100000 = x; \text{ Also}$$

$$\log\left(\frac{x}{100000}\right) + \log 100000 = \log x$$

$= - 1,2708352 + 5 = 5,0000000 - 1,2708352 = 3,7291648 = \log 5360$; Folglich $x = 5360$

und daher

$$\frac{5360}{100000} = \frac{536}{10000} = 0,0536$$

der Bruch, der zu dem Logarithmen $-1,2708352$, gehört.

*) Zusatz

wegen der S. 313 — 315 erwähnten negativen Verhältnisse.

„Ich habe Seite 313 positive und negative „Verhältnisse aus der geometrischen Reihe

$$\ldots e^{-4}, e^{-3}, e^{-2}, e^{-1}, 1, e^{1}, e^{2}, e^{3}, e^{4}, \ldots$$

„herzuleiten gesucht, und Verhältnisse wie $1 : e^3$ „und $1 : e^{-3}$ entgegengesetzte genennt. Die „Hinterglieder beyder Verhältnisse liegen nämlich „in dieser Reihe auf verschiedenen Seiten der ge„meinschaftlichen Gränze (des Vordergliedes) 1, „und können folglich als einander der Lage nach „entgegengesetzte Glieder betrachtet werden.

„Gleichwohl berechtiget das noch nicht, auch „selbst die Verhältnisse aus solchen Gliedern ent„gegengesetzte zu nennen. Das Wesentliche der „entgegengesetzten Größen, und so auch der entge„gengesetzten Verhältnisse, besteht unstreitig dar„inn, daß sie einander vermindern. Das thun „aber keinesweges die Verhältnisse $1 : e^3$ und „$1 : e^{-3}$, deren Hinterglieder e^3 und e^{-3} nicht, „wie positive und negative Größen, einander „entgegengesezt sind; weil man in der Reihe, zu

Z 4 welcher

*) Von dem Herrn Verfasser der Erinnerung wegen der zusammengesetzten Verhältnisse, Seite 308 und f.

„welcher diese Glieder gehören, nie auf ein nega-
„tives Glied kommen kann.

„Was sind nun aber negative Verhältnisse?
„und wodurch wird man auf sie geleitet?

„Der Exponent einer Verhältniß ist bekann-
„termaßen der Quotient, den das Vorderglied
„durch das Hinterglied dividirt giebt, und zeigt
„zugleich wie das lezte, ganz oder zum Theil, in
„dem ersten enthalten sey. Dieser Exponent, so
„wie die Glieder der Verhältnisse, sind insgemein
„positiv. Bey zwo Verhältnissen also, deren Ex-
„ponenten einander entgegengesezte Zahlen wären,
„würden auch die Hinterglieder in ihren Vorder-
„gliedern, auf eine entgegengesezte Art bey bey-
„den, enthalten, und dadurch die Verhältnisse
„selbst einander entgegengesezt seyn. Verhältnis-
„sen also, in denen beyde Glieder einerley Zeichen
„haben, können keine andere entgegengesezt seyn
„als solche, deren Glieder verschiedene Zeichen ha-
„ben. Nennt man die erstern **positive**, so sind
„die leztern **negative Verhältnisse**; und um-
„gekehrt: und so kann man mit Hausen (Elem.
„Arithm. Prop. III. Schol. 2.) der positiv ange-
„nommenen Verhältniß + 6 : + 2 oder — 6 :
„— 2 (denn beyde haben einerley Exponenten,
„der Größe und dem Zeichen nach) die negative
„Verhältniß — (6 : 2) das ist — 6 : + 2, oder
„auch die ihr gleichgültige + 6 : — 2, entge-
„gen setzen.

Folg-

„Folglich ist auch, nach dem Verfahren, wie „man entgegengesetzte Größen durch einander aus„drückt, 6 : 2 = — (— 6 : 2) = 6 : 2; und „für jede zwo entgegengesetzte sonst gleiche Ver„hältnisse a : b und — c : d überhaupt, a : b = „— (— c : d) = c : d, also auch — (a : b) d. i. „— a : b = — c : d. Wären die entgegenge„setzten Verhältnisse a : b und c : — d gegeben, „so wäre eben so a : b = — (c : — d) = — c : „— d, folglich auch a : b = c : d; denn die „Verhältnisse c : d und — c : — d sind offenbar „einander gleichgültig.

„Die Glieder — 6 und + 2, so wie + c und „— d, können nicht Glieder einer und eben dersel„ben geometrischen Reihe seyn; und wenn sie es „auch wären, so würde dennoch die Reihe, für „welche man, auf solchem Fall, e verneint neh„men müßte, nicht alle negative Verhältnisse dar„stellen können, weil sie zwar positive und nega„tive Glieder mit einander vermengt, aber den„noch nicht alle mögliche Zahlen enthielte. Eul. „Introd. ad Anal. Infin. C. VI. §. 99.

„Es ist aber auch nicht nöthig, wenn von Ver„hältnissen überhaupt die Rede ist, ihre Glieder „aus einer geometrischen Reihe zu nehmen; wie „bey den Verhältnissen geschehen muß, für welche „man die Logarithmen berechnen will, weil diese „an ein bestimmtes System gebunden sind, das „durch die geometrische Reihe gegeben ist.

„Auf negative Verhältnisse kann man, eben so „wie bey den absoluten Zahlen, durch die Sub- „traction verfallen. Wollte man z. E. von der „kleinern positiven Verhältniß 6 : 2 die größere „positive 10 : 2 abziehen, so würde, wie bey den „Zahlen, ein negativer Rest kommen, welcher „hier kein anderer als die negative Verhältniß „— (4 : 2) seyn würde; die auch zu 10 : 2 hin- „zugesezt, die 6 : 2 wieder hervorbringen, und „also jene Verhältniß eben so, wie eine negative „Zahl zu einer positiven gesezt, vermindern wür- „de. Man könnte, zum Unterschiede, die Addi- „tion und Subtraction der Verhältnisse, die „arithmetische, die Multiplication und Divi- „sion derselben aber, die geometrische Zusam- „mensetzung und Trennung der Verhältnisse „nennen; so wie man bereits arithmetische und „geometrische Verhältnisse unterscheidet.

„Negative Verhältnisse, wie — a : + b oder „+ 1 : — 1, schloß Leibnitz von der Reihe der „wahren Verhältnisse aus. Opp. T. III. p. 439; „und Commerc. ep. Leibn. et Bern. Tom. II. p. „269 seqq. Er nennte sie imaginäre oder un- „mögliche Verhältnisse, unter andern auch des- „wegen, weil solcher Verhältnisse Logarithmen „unmöglich wären.

„Allein, obgleich Vergleichungen entgegenge- „sezter Größen nicht völlig in dem Verstande Ver- „hältnisse geben, in welchem Euklides das Wort „nimmt; denn schon die 4te und 5te Erklärung

seines

„seines 5ten Buches würden darauf nicht passen:
„so kann man sie doch nach der Analogie so nen-
„nen, und den Begriff von Verhältniß überhaupt
„auf sie erweitern. Daß manche Euklideische Sä-
„ße von Verhältnissen auf diese negativen Ver-
„hältnisse nicht geradezu können angewendet wer-
„den, hebt deswegen ihre Realität nicht auf; so
„lange die Realität negativer Größen gesichert
„bleibt, auf welche sich gleichwohl nicht einmal
„Euklid's Grundsätze, ohne Einschränkung, er-
„strecken lassen. Auch hier, wie in andern Fäl-
„len, hat man die Worte und Sätze den Begrif-
„fen gemäß, angenommen und eingerichtet, die
„am gewöhnlichsten und häufigsten vorkommen;
„denn wenn man von Größen oder Verhältnissen
„überhaupt spricht so versteht man darunter alle-
„mal positive, dergleichen bey den Alten nur al-
„lein vorkommen, denen der Begriff des Negati-
„ven durchaus fremd und unbekannt war.

„Eine positive und eine negative Verhältniß
„(wie [10 : 2] — [4 : 2] im vorigen Exempel)
„können zusammen eine positive Verhältniß (hier
„6 : 2) geben, an deren Realität Niemand zwei-
„felt. Das würde aber nicht geschehen können,
„wenn die negativen Verhältnisse nicht auch selbst
„wahre Verhältnisse, sondern schlechthin imagi-
„när oder unmöglich wären. Daß negativer Ver-
„hältnisse Logarithmen unmöglich sind, beweißt
„nichts dagegen; weil ein zusammengesezter un-
„möglicher Begriff (ein rundes Viereck, ein drey-
seitiges

„seitiges Parallelogramm) auch blos aus Verbin-
„dung zweener an sich möglicher reeller Begriffe
„entstehen kann.

„Ein solcher Begriff ist auch der Logarithme ei-
„nes negativen Verhältnisses; die geometrische
„Reihe für das Logarithmensystem, wie gewöhn-
„lich, so genommen, daß alle Glieder in ihr positiv
„sind.

„Hier kommt, wie bekannt, alles auf die Grund-
„verhältniß 1 : e, der Einheit zur Basis an.
„Giebt man dieser Basis verschiedene Werthe,
„der Größe nach, so erhält man dafür eben so viel
„verschiedene Systeme, deren es, wegen dieser
„unzähligen Werthe, unzählig viel giebt.

„Man kann aber auch die Basis, und selbst
„die Einheit, negativ nehmen; und so erhält
„man für die Grundverhältniß viererley Gestal-
„ten 1) $+1 : +e$; 2) $-1 : -e$; 3) $+1 : -e$;
„4) $-1 : +e$; woraus nachstehende Reihen für
„Glieder von ganzen, positiven und negativen, Ex-
„ponenten folgen:

1) $\ldots +e^{-4}, +e^{-3}, +e^{-2}, +e^{-1}, +1, +e, +e^2, +e^3, +e^4 \ldots$

2) $\ldots -e^{-4}, -e^{-3}, -e^{-2}, -e^{-1}, -1, -e, -e^2, -e^3, -e^4 \ldots$

3) $\ldots +e^{-4}, -e^{-3}, +e^{-2}, -e^{-1}, +1, -e, +e^2, -e^3, +e^4 \ldots$

4) $\ldots -e^{-4}, +e^{-3}, -e^{-2}, +e^{-1}, -1, +e, -e^2, +e^3, -e^4 \ldots$

„die

„die ich hier kürzlich betrachten will.

„Die 3te Reihe, aus der Grundverhältniß „$+ 1 : - e$, kann, wie bereits Herr Euler a. a. „O. erinnert hat, nicht gebraucht werden, weil „Verhältnisse, wie $- e^{\frac{1}{2}n} : 1 = (- e : 1)^{\frac{1}{2}n}$ „$= (- e)^{\frac{1}{2}n} : 1 = {}^{2n}\sqrt{- e} : 1$ unmögliche „Werthe bekommen, der mögliche Bruch $\frac{1}{2n}$ als „Logarithme einer unmöglichen Verhältniß oder „Zahl zugehören *), auch ein solches System nicht „jeder möglichen Zahl Logarithmen geben würde.

„Eine ähnliche Schwierigkeit zeigt die 4te Rei„he, aus der Grundverhältniß $- 1 : + e$.**) In „dieser ist das Vorderglied $- 1$, welches man „bey Behandlung dieser Reihe nicht aus der Acht „lassen muß; denn für eine negative Einheit, „wie bey diesem Systeme zum Grunde gelegt wird, „geben einerley Zeichen bey der Multiplication „und Division $-$, verschiedene Zeichen $+$; Kästn. „Arithm. Cap. I, 107 verglichen mit 101. Also ist

*) Haberentur Logarithmi possibiles impossibilium, wie Leibnitz sagt; Commerc. epist. T. II. p. 303.

**) Sie hat keine Glieder $+ e^{2n}$, $- e^{2n+1}$, wie 3 keine Glieder $- e^{2n}$, $+ e^{2n+1}$. Auch führt die Interpolation bey beyden auf unmögliche Glieder.

„ist auch, auf diesem Fall $(+ e)^{2n} = - e^{2n}$ und „$(- 1)^{2n} = - 1$. Das hat Joh. Bernoulli „nicht bedacht, sonst würde er gegen Leibnitzen „nicht behauptet haben, $\sqrt{-2}$ sey nicht die mitt„lere Proportionalzahl zwischen -1 und -2, „wie $\sqrt{2}$ zwischen $+1$ und $+2$ es ist. Comm. „ep. T. II. p. 282.

„Die dritte und vierte Reihe fallen also, we„gen Mangel an Continuität, ganz weg. Es „lassen sich bey ihnen nicht alle Verhältnisse aus „den angenommenen Fundamentalverhältnissen her„leiten, und so wären auch die zugehörigen Expo„nenten nicht die Logarithmen solcher Verhältnisse; „wie doch nothwendig seyn sollte.

„Es bleiben also nur die beyden ersten Reihen „übrig, aus deren Betrachtung folgendes erhellt:

1) Die erste Reihe enthält lauter positive Glie„der, und da sind Logarithmen negativer Ver„hältnisse oder Zahlen unmöglich; weil es für ein „System aus dieser Reihe überhaupt keine solchen „Verhältnisse oder Zahlen giebt.

2) „Die zweyte Reihe enthält lauter negative „Glieder. In einem Logarithmensystem aus die„ser Reihe sind nun allerdings Logarithmen nega„tiver Verhältnisse oder Zahlen möglich; weil hier „überhaupt $- e^m : - 1 = (- e : - 1)^m$, für „jeden positiven oder negativen, ganzen oder ge„brochenen Werth von m, d. i. dem Logarithmen der „Verhältniß $- e^m : - 1$ oder der Zahl $- e^m$;

wohl

„wohl verstanden, daß auch hier, wie bey der 4ten „Reihe, die negative Einheit zum Grunde liegt. „Bey dieser Reihe sind die Logarithmen positiver „Verhältnisse oder Zahlen unmöglich.

3) „Für ein System also, worinn es Logarith„men positiver Verhältnisse oder Zahlen giebt, „giebt es keine für die negativen, und so auch um„gekehrt, bey Logarithmen negativer Verhältnisse „oder Zahlen, keine für die positiven.

„Wenn man das Gezeigte mit der zwischen „Leibnitzen und Joh. Bernoulli geführten Strei„tigkeit vergleicht, so erhellt klar:

4) „Daß Joh. Bernoulli gleich anfangs den „statum controuersiae verändert, und da eine ne„gative Einheit und Basis (wie bey meiner zwey„ten Reihe) zum Grunde gelegt hat, wo Leibnitz „beyde positiv setzte; denn seine Behauptung, daß „negative Verhältnisse oder Zahlen keine Logarith„men haben, bezog sich offenbar auf eine Reihe, „wie meine erste, für welche die Einheit (auch „die Basis) positiv ist; wie man durchgängig, und „in allen Rechnungen, wo auch nicht von Logarith„men die Rede ist, stillschweigend annimmt, wenn „man sich darüber nicht besonders erklärt. Es „ist auch natürlich, was man von Logarithmen „überhaupt sagt, alles auf Ein Hauptsystem zu be„ziehen, in so fern man nicht das Eigne verschie„dener Systeme untersuchen, oder sie mit einan„der vergleichen will.

5) Das

5) „Dagegen hätte aber auch Leibnitz in der „Folge nicht so allgemein behaupten sollen, daß „Logarithmen negativer Verhältnisse oder Zahlen „überhaupt unmöglich wären; da sie es doch nach „einem System, wie die zweyte Reihe darstellt, „nicht sind. Auch läßt sich die Behauptung, daß „Verhältnisse negativer Größen imaginär wären, „nicht rechtfertigen, die Bernoulli auch nicht zu„gab, eben so wenig als den Grund, worauf Leib„nitzens Meynung sich stützte, von der Unmög„lichkeit ihrer Logarithmen, die den Streit ver„anlaßten.

6) Auch wird man finden, daß beyde Par„theyen hier und da auf Glieder aus der dritten „und vierten Reihe verfallen, ohne sich jedoch deut„lich darüber gegen einander zu erklären, vielleicht „auch ohne sich des Unterschieds dieser Reihen, und „was jede Eignes hat, selbst recht bewußt zu seyn, „weil man alles, was von Logarithmen bis auf „die Zeit dieses Streites bekannt war, wissen konn„te, ohne diese Reihen, außer die erste, jemals „in Betrachtung gezogen, oder gegen einander „verglichen zu haben.

„Diese Anmerkungen sind, wie ich glaube, zu„reichend, alle anscheinende Widersprüche, die in „den Leibnitz-Bernoullischen Sätzen und Gegen„sätzen, diese Sache betreffend, vorkommen, zu „erklären und aufzuschließen. Beyde Partheyen „haben übrigens an andern großen Mathemati„kern ihre Vertheidiger gefunden, und noch sind

die

„die Meynungen vieler Gelehrten bis auf den „heutigen Tag hierüber getheilt. Die Sache „scheint gleichwohl nur ein Wortstreit zu seyn, „wofür die Entscheidung, nach dem Beygebrach„ten, nicht simpliciter, sondern distinguendo muß „gegeben werden.

„So kann das, was S. 313—315 zwischen „den 6ten und 7ten Zusatze, von negativen Ver„hältnissen steht, verbessert und erweitert werden. „Verhältnisse, wie ich daselbst aus Betrachtung der „Reihe hergeleitet hatte, nennt auch Hausen „(Elem. Arithm. p. 57. §. 3) quantitates deter„minationis oppositae, und giebt ihnen daher „ebenfalls verschiedene Zeichen z. E. $A : B = -$ „$(B : A)$, so wie ich $1 : e^3 = -(e^3 : 1)$ gesezt „hatte. Allein, ob sich das gleich aus der von „ihm für die Zusammensetzung der Verhältnisse „gewählten Bezeichnung rechtfertigen läßt, so hal„te ich doch dafür, es sey besser, umgekehrte „Verhältnisse von negativen zu unterscheiden, „wie ich nun gethan habe, und wie ich glaube „daß man auch thun muß, wenn man die Analo„gie zwischen absoluten Größen und Verhältnis„sen genau befolgen, und die Bedeutung der Zei„chen nicht ändern oder einschränken will.

„Sollte das, was hier von den positiven und „negativen Verhältnissen und von beyder Logarith„men gesagt worden ist, mehreres Licht wie ich nicht „zweifle, über diese berühmte Streitigkeit verbreiten, „so würde das obige Versehen, welches diese Be-

„richtigung veranlaßt hat, nicht ohne Nutzen seyn.
„Unstreitig ist ein Gegenstand der größten Auf„merksamkeit würdig, worüber so große und be„rühmte Männer, Leibnitz und Bernoulli, Euler
„und Alembert, worüber Walmesley und Fonce„nex und Scarrella und Boscovich nicht einerley
„Meynung gehabt haben.

„Zum Beschlusse will ich noch eine Stelle des „Letztern hersetzen, worinn er sich, bey Gelegen„heit daß er dieses Streites gedenkt, über dieses „und andere Misverständnisse, die es zuweilen un„ter den neuern Mathematikern gegeben hat, fol„gendergestalt erklärt:

Jo sono persuaso, che tutte le difficoltà e contraddizioni nascano appunto dalla oscurità, e mancanza di precisione delle idee attaccate ad alcuni nomi da' moderni Matematici; onde ne ne nascano tante liti fra loro, mentre la pacifica Geometria de' Greci n'è priva affato. Tali sono, a mio giudizio, le idee delle quantità immaginarie, che sono assurde, dell' infinito assoluto, che mena prima a de' misteri, in di a degli assurdi — quelle degli infinitamente piccoli e degli indefinitamente grandi, mal concepiti da alcuni, e però trattati in modo da incerrere in errori. — Idee incerte pure, e confuse, credo, che si abbiano della natura delle quantità negative, sulla quale ancora si litiga, e molto più della idea di multiplicazione, e divisione fatta per una quantità negativa, e dell' idea di rapporto,

to, o proportione geometrica, ove questa parola si applichi alle quantità negative e positive mescolate insieme: così pure non è netta l'idea delle potenze delle quantità negative, che ne dipende, e nelle quali nascono de' grandi imbarazzi, massime ove l'esponente sia indefinito.

„Diese Anmerkung ist sehr wahr und gegründet, und könnte durch häufige, zum Theil sehr „neue, Beyspiele belegt werden, wenn hier der „Ort dazu wäre. Um so größer ist aber auch „das Verdienst solcher Männer, wie Kästner, „Segner, Karsten, die in ihren Lehrbüchern das „Fehlerhafte in diesen Begriffen zu verbessern, „und alles darinne bis zur größten Evidenz aufzuklären bemüht gewesen sind. Vielleicht hat „hier unsere Nation einen Vortheil vor andern, „deren mathematische Lehrbücher auch größtentheils, nicht nur in diesem Puncte, sondern „überhaupt, an Deutlichkeit, zweckmäßiger Vollständigkeit und demonstrativer Schärfe, den genannten weit nachstehen.

Zusatz
zu der Erläuterung
des 78sten §. des I. Capitels
der Arithmetik.

I. Ich glaubte erst daß Anfänger diesem §. ohne Erläuterung verstehen würden; und dies kann man auch wenn man nur die gehörige Aufmerksamkeit anwendet; Allein manchen Anfängern dürfte wohl einige Erläuterungen dieses §. nöthig seyn, besonders solchen, welche die Erlernung der Brüche für sehr schwer halten, da doch nichts leichter als dies ist.

II) Wenn man einen Bruch, z. E. $\frac{3}{4}$ durch einen andern, z. B. $\frac{5}{11}$ dividiren will; so will man eigentlich wissen, wie vielmal der Divisor $\frac{5}{11}$ im Dividendus $\frac{3}{4}$ stecke.

Gesezt diese Brüche hätten einerley Nenner, oder man sollte

$$\frac{20}{44} \text{ in } \frac{33}{44}$$

dividiren.

Nun

Nun kann man diese Brüche als ganze Zahlen ansehen, deren Einheit $= \frac{1}{44}$, daß also 20 solche Einheiten der Bruch $\frac{20}{44}$, und 33 den Bruch $\frac{33}{44}$ ausmachte (53. §.).

Also hätte man nun 20 in 33 zu dividiren; Folglich wäre

$$\frac{33}{44} : \frac{20}{44} = 33 : 20$$

$$= \frac{33}{20}$$

Also der Quotient ein Bruch dessen Zähler 33, des Dividendus $\frac{33}{44}$ Zähler und Nenner 20, des Divisors $\frac{20}{44}$ Zähler ist.

III) Wenn man also Brüche, wie $\frac{5}{11}$ und $\frac{3}{4}$ die nicht einerley Nenner haben, zu dividiren hat; so muß man sie dazu bringen, und alsdann dividiren, wie izt gezeigt worden.

Bringt man aber $\frac{5}{11}$ und $\frac{3}{4}$, zu einerley Benennung; so erhält man für den erstern

$$\frac{20}{44}, = \frac{5 \cdot 4}{11 \cdot 4} \text{ (72)}$$

und für den andern

$$\frac{33}{44} = \frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 11}$$

Folglich

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{33}{44} : \frac{20}{44}$$

Aber

$$\frac{33}{44} : \frac{20}{44} = \frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 11} : \frac{5 \cdot 4}{11 \cdot 4}$$

$$= \frac{3 \cdot 11}{44} : \frac{5 \cdot 4}{44}$$

$$= \frac{3 \cdot 11}{5 \cdot 4}$$

Folglich

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{3 \cdot 11}{5 \cdot 4}$$

$$= \frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 5}$$

Aber

$$\frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{5} \text{ (75. §.)}$$

Mithin

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{5}$$

Wenn

Wenn man also $\frac{3}{4}$ durch $\frac{5}{11}$ dividiren will; so darf man nur $\frac{3}{4}$ mit $\frac{11}{5}$ multipliciren.

Nun ist $\frac{3}{4}$ der Dividendus und $\frac{11}{5}$ der umgekehrte Bruch $\frac{5}{11}$; also der umgekehrte Divisor.

Folglich, da alle diese Schlüsse statt finden, was auch Dividendus und Divisor für Brüche seyn, hat man für die Division zweener Brüche folgende Regel:

Man multiplicire den umgekehrten Divisor in den Dividendus.

IV) Wenn man in dem Beweis im Buche, $\frac{3}{4}$ als den gegebenen Dividendus und $\frac{5}{11}$ als den gegebenen Divisor annimmt; so ist $\frac{3}{4}$ der erste Dividendus, und $\frac{5}{11}$ der erste Divisor, hingegen $\frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 11}$ ist der zweyte Dividendus und $\frac{5 \cdot 4}{11 \cdot 4}$ der zweyte Divisor.

Hat man dies vor Augen; so wird die ganze Sache dort sehr deutlich seyn.

Und nun wird jeder Anfänger diesen §. leicht verstehen.

Einige Folgerungen.

V) $\frac{95}{96} : \frac{5}{6} = \frac{95}{96} \times \frac{6}{5}$

$$= \frac{95}{96} . 6 . \frac{1}{5}$$

$$= \frac{95}{96:6} \times \frac{1}{5} \text{ (66. §.)}$$

$$= \frac{95}{96:6} : 5 \text{ (61. §.)}$$

$$= \frac{95:5}{96:6} \text{ (66.§.)}$$

$$= \frac{19}{16}$$

Wenn man also des Dividendi Zähler [95] mit des Divisors Zähler [5], und des Dividendi Nenner [96] mit des Divisors Nenner [6], dividirt; so erhält man durch die erste Division den Zähler, durch die zweyte aber den Nenner des gesuchten Quotienten.

VI) Dies ist aber nur brauchbar, wenn diese Zähler und Nenner sich ohne Rest dividiren lassen.

VII) Geschähe dies nur mit den Zählern aber nicht mit den Nennern, wie z. B. bey $\frac{12}{17}$ und $\frac{4}{9}$;

so

so dividire man des Dividendi Zähler [12] durch den [4] des Divisors, und was man hiedurch erhält [3] multiplicire man mit des Divisors Nenner [9].

Denn

$$\frac{12}{17} : \frac{4}{9} = \frac{12}{17} \times \frac{9}{4}$$

$$= \frac{12}{17} \cdot \frac{1}{4} \cdot 9$$

$$= \frac{12}{17} : 4 \times 9$$

$$= \frac{12 : 4}{17} \times 9$$

$$= \frac{12 : 4 \times 9}{17}$$

$$= \frac{27}{17}$$

VIII) Läßt hingegen die Division der Zähler ein Rest, aber nicht der Nenner, wie z. B. bey $\frac{7}{18} : \frac{5}{9}$; so dividire man des Dividendi Nenner (18) mit des Divisors seinen (9) und was so herauskommt, multiplicire man mit des Divisors Zähler (5).

Denn

$$\frac{7}{18} : \frac{5}{9} = \frac{7}{18} \times \frac{9}{5}$$

 $= \frac{7}{18}$

$$= \frac{7}{18} \cdot 9 \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{18 : 9} \times \frac{1}{5} \text{ (66. §.)}$$

$$= \frac{7}{18 : 9 \times 5}$$

$$= \frac{7}{10}$$

IX) Eine ganze Zahl mit einem Bruche zu dividiren geschiehet ebenfalls nach dem 78. §.

Denn eine solche Zahl kann als ein Bruch angesehen werden, dessen Zähler die ganze Zahl selbst, der Nenner aber die Einheit ist (68).

Z. E. $15 : \frac{5}{7} = \frac{15}{1} : \frac{5}{7}$

$$= \frac{15}{1} \times \frac{7}{5}$$

$$= \frac{15 \cdot 7}{5}$$

$$= 3 \cdot 7$$

$$= 21$$

Nach (VII) findet sich dieser Quotient geschwinder. Denn

$$\frac{15}{1} : \frac{5}{7} = \frac{15 : 5 \times 7}{1}$$

$$= 3 \cdot 7$$

$$= 21.$$

Druckfehler

so in des Herrn Hofrath Kästners mathematischen Anfangsgründen I. Th. in der Arithmetik bemerkt worden sind.

Seite 30, Zeile 17, lies 12 : 3 = 4 statt 12 · 3 = 4.

— 33, — 23, lies 12 statt 22.

— 24 lies 12 statt 22

— 35 — lezte lies 9000 . 7 statt 900 . 7.

— 38 — 11 von unten herauf lies Dividendendus statt Divisor.

— 42 — 6 lies 4^3 statt 4.

— 44 — 7 lies und statt umb.

— 47 — 3 von unten lies (63) statt (62)

— lezte lies (62) statt (63)

— 48 — 8 lies (63) statt (62)

— 9 lies (62) statt (63)

— 49 — 17 lies $\frac{45}{360}$ statt $\frac{45}{366}$

— 23 lies $\frac{4\frac{3}{4}}{9}$ statt $\frac{4\frac{2}{3}}{9}$

— 51 — 4 lies $= \frac{6}{9}$ statt $= 6$

— 11 lies $= \frac{1}{9}$ statt $= 1$

— lezte lies $\frac{3}{4}$ statt 3

Seite

Seite 52 — 4 lies $\frac{3}{4}$ statt $\frac{2}{4}$

— 53 — 12 lies $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}$ statt $\frac{\sqrt[3]{8}}{128}$

— 55 — 16 lies $\frac{12}{8}$ statt $\frac{12}{3}$

lies $\frac{10}{7}$ statt $\frac{10}{1}$

— 57 — 3 lies $\frac{2}{5}$ statt $\frac{2}{8}$

— 59 — lezte ohne eine lies $\frac{2}{3 \cdot 5} \cdot 7$ statt $\frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7}$

— 67 — lies $0 - 4$ statt $- 4$

— 7 lies (95) statt (96)

— 71 — lies schreibt statt schrribt

— 72 — 24 lies 50 . c statt 500

— 73 — 11 lies 12 b statt 12 d

— 13 lies 20 b statt 20 d

— 75 — 16 lies $c^{\frac{1}{2}}$ statt $c\frac{1}{2}$

17 lies $c^{\frac{1}{3}}$ statt $c\frac{1}{3}$

— 78 — 3 lies Sechzigtheile statt Sechzehntheile

— 6 lies $\frac{3}{10}$ statt $\frac{3}{20}$

— 79 — 6 lies $\frac{1,0}{2}$ statt $\frac{1,0}{1}$

Seite 79 Z. 16 lies 5 Zus. statt 3 Zus.

— 9 lies $\frac{1}{288} = 0,003472222\ldots$ statt $\frac{1}{288}$ 0,003472222 ...

— 80 — 5 von unten lies 0,000005 statt 0,00005

— lezte lies 15^{-4} statt $15 =^{-4}$

— 81 — 3 lies 10^{-n} statt 10^{n}

— 10 lies $3^{-5} \cdot 2^{-3} = 6^{-8}$ statt $3^{\cdot 5} \cdot 2^{\cdot 3} = 6^{\cdot 8}$

— 82 — 9 lies $10^{6-4} = 400$ statt $4 \cdot 10^{6-4} = 400$

— 83 — 3 von unten lies — 6 statt 6

— 84 — 3 lies — 5 statt 5

— 87 — 15 lies 15 statt 5

— 88 — 6 von lies $\frac{33}{60} : \frac{16}{60 \cdot 60}$ statt $\frac{33}{36}; \frac{16}{6060}$

— 4 von unten lies $= 3 + \frac{45}{60}$ statt $= 3 = \frac{45}{60}$

— 95 — 16 lies $e \cdot 10^{n}$ statt $e \cdot 10^{u}$

— 19 lies 2 n statt 2 u

Seite 96 Z. 22, 23, 24 schreibe man so:

81 von der Ordnung 2 n
162 von der Ordnung 2 n — 1

Summe 972 von der Ordnung 2 n — 1

— 98 — 23 lies n + 1 statt n

— 111 — 19 lies S > R statt S < R

— 27 lies S < R statt S > R

— 113 — 3 lies $3 p^2 q$ statt $3 p q$

— 11 lies $3 (p + q + r)^2 . s$ statt $3 (p + q + r)^2$

— 21 lies $e . 10^n$; statt $e . 10^n$

— 114 — 16 lies $f . 10^{n-1}$ statt $f . 10^n$

— 22 lies q^3 statt q

— lezte lies f^3 statt f

— 117 — 15 lies 32464 statt 3264

— 123 — 30 lies

√3 zwischen 1,7320508 und 1,7320509 fallen

statt √3 zwischen 1,7320508 und fallen 1,7320509

— 126 — 16 lies a + 2 d statt b + 2 d

— 127 — 11 lies (2) statt (8)

— 129 — 3 von unten lies 20 : 5 statt 20 :

— 136 — 1 lies 2600 : statt 2600

Seite 145 Z. 18 lies $761 \frac{20}{21}$ statt $761 \frac{10}{21}$

— 19 lies $\frac{2000}{21} = 95 \frac{5}{21}$ statt $\frac{2000}{21}$ $92 \frac{5}{21}$

— 146 — 24 lies $= a^6$ statt $= a$

— 148 — 16 lies $= a^{\frac{2m+1}{2}}$ statt $a^{\frac{+m21}{2}}$

— 156 — 14 lies $\frac{7852}{11345}$ statt $\frac{7852}{11445}$

— 157 — 2 lies $\sqrt[4]{\frac{7364^3}{5498^2}}$ statt $\sqrt[4]{\frac{7364^3}{5499^2}}$

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lempe, Johann Friedrich, 1757-1801

Erläuterungen der Kästnerischen Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie

Bd.: 1

Altenburg (1781)

Math.u. 78-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625433-5
VD18 80417094-001